LÍMITES Y CONTINUIDAD

Tamara ARRONTES SOLA

RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS DE LÍMITES POR ESTUDIANTES DE 1º DE BACHILLERATO DE CIENCIAS SOCIALES

TFM 2013

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
Giza eta Gizarte Zientzien Fakultatea

Ámbito MATEMÁTICAS

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Trabajo Fin de Máster

Ámbito Matemáticas

Resolución de ejercicios de límites por estudiantes de 1º Bachillerato de Ciencias Sociales

Tamara Arrontes Sola

UNIVERSIDAD PÚBLICA DE NAVARRA

NAFARROAKO UNIBERTSITATE PUBLIKOA

ÍNDICE

Introducción general

Este Trabajo Fin de Máster tiene como objetivo estudiar los errores que cometen los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales y las limitaciones o dificultades a las que se enfrentan cuando resuelven problemas de límites. Dicho estudio se centra en analizar la naturaleza de estos fallos, dificultades y limitaciones, de sus causas. En base a las conclusiones extraídas, se proponen posibles soluciones.

El trabajo se estructura en dos partes. En la primera parte se realiza un estudio longitudinal del currículo y de los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato con relación al tema indicado.

En la segunda parte se propone un proceso de estudio sobre límites, que se ha puesto en marcha en dos aulas de 1º Bachillerato de Ciencias Sociales del Instituto Plaza de la Cruz en el marco del Prácticum II del Máster. Los resultados extraídos de esta experimentación se fundamentan en un cuestionario construido *ad hoc*, teniendo en cuenta asimismo las restricciones institucionales.

El trabajo concluye con una síntesis, unas conclusiones y unas cuestiones abiertas

Parte I: Los límites en el currículo vigente y en los libros de texto

En esta primera parte del Trabajo Fin de Máster se analiza cómo se aborda el tratamiento de límites en el currículo y en los libros de texto en el tercer ciclo de Primaria, en ESO y en Bachillerato.

El análisis se divide en cuatro capítulos. En el primer y segundo capítulo se muestran en forma de tabla los contenidos y criterios de evaluación del currículo vigente que hacen referencia a los límites en cada uno de los grados. En el tercero se presentan ejemplos de las actividades (ejercicios, problemas, cuestiones y situaciones) tipo propuestas en un libro de texto de 1º Bachillerato de Ciencias Sociales, así como en dos cursos anteriores y dos posteriores.

Las conclusiones que se extraen del análisis comparativo de los contenidos de ambas fuentes (currículo y libro de texto) se exponen en el cuarto capítulo. El objetivo aquí es valorar la coherencia de los manuales con relación al currículo vigente y resaltar las presencias o ausencias de conocimientos matemáticos relativos al tema objeto de análisis.

Capítulo 1.
Límites en el currículo vigente

En este capítulo se exponen los fragmentos de contenidos mínimos del currículo oficial vigente publicado en el Boletín Oficial del Estado para E.S.O. y Bachillerato, que hacen referencia directa o indirecta al tema de límites. No se hace mención a Educación Primaria porque no existe relación suficientemente próxima con los límites en este nivel.

Los contenidos del currículo presentados están clasificados por curso, según los descriptores de los contenidos específicos seleccionados.

Estos descriptores son los siguientes: fracción generatriz, ley de los grandes números, suma infinita de una progresión geométrica, funciones (características, propiedades, tipos, estudio gráfico, representación gráfica), límites de una función en un punto, tendencias, continuidad, derivada y asíntotas[1].

1.1 Contenidos en E.S.O.

1.1.1 Primer ciclo

1.1.1.1 Primer curso

Descriptor	Contenido
Fracción generatriz[2]	Bloque 2. Números. Fracciones y decimales en entornos cotidianos. Diferentes significados y usos de las fracciones. Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente. Números decimales. Relaciones entre fracciones y decimales.
Ley fuerte de los grandes números[3]	Bloque 6. Estadística y probabilidad. Formulación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y diseño de experiencias para su comprobación. Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar y describir situaciones inciertas. Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Frecuencias absolutas y relativas.

1.1.1.2 Segundo curso

Descriptor	Contenido
Fracción generatriz[4]	Bloque 2. Números. Relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes.

[1] No se incluye el descriptor de integral puesto que en educación secundaria no se estudia a través de la teoría de límites.
[2] Aunque este descriptor no aparezca de forma específica en el currículo, sí se hace referencia de manera indirecta (relaciones entre números decimales y fracciones) y aparece en el libro de texto.
[3] Se entiende que el currículo hace referencia a la Ley de los Grandes Números en lo relativo al diseño de experiencias para la comprobación del comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

1.1.2 Segundo ciclo

1.1.2.1 Tercer curso

Descriptor	Contenido
Fracción generatriz	Bloque 2. Números. Números decimales y fracciones. Transformación de fracciones en decimales y viceversa. Números decimales exactos y periódicos. Fracción generatriz.
Suma infinita de una progresión geométrica[5]	Bloque 3. Álgebra. Análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas.
Características y propiedades de funciones y gráficas	Bloque 5. Funciones y gráficas. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.
Ley de los grandes números	Bloque 6. Estadística y Probabilidad Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar. Cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos. Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación.

1.1.2.2 Cuarto curso- Opción A

Descriptor	Contenido
Tipos de funciones. Estudio de funciones y gráficas.	Bloque 5. Funciones y gráficas. Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis.

1.1.2.3 Cuarto curso- Opción B

Descriptor	Contenido
Tipos de funciones. Estudio gráfico.	Bloque 5. Funciones y gráficas Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.

[4] Ver nota al pie 2.
[5] La referencia a la suma infinita no es directa, pero aparece en los libros de texto del curso.

1.2 Contenidos en Bachillerato

1.2.1 Bachillerato de Ciencias

1.2.1.1 Matemáticas I

Descriptor	Contenido
Suma infinita de una progresión geométrica[6]	Bloque 1. Aritmética y algebra. Sucesiones numéricas: termino general, monotonía y acotación. El numero e. Logaritmos decimales y neperianos. Operaciones elementales. Utilización de la calculadora científica.
Tipos y características de funciones. Estudio de sus propiedades y gráfica. Representación	Bloque 3. Análisis Funciones reales de variable real: Dominio, recorrido y extremos de una función. Clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Función simétrica. Función periódica. Operaciones y composición de funciones. Función inversa. Interpretación intuitiva de las propiedades globales y locales de una función mediante el análisis de su dominio, recorrido, crecimiento, extremos, tendencia y continuidad. Esbozo de la grafica de funciones elementales. Valoración de las tecnologías para el estudio y la representación grafica de funciones. Disposición para modelizar situaciones y fenómenos con ayuda de graficas conocidas.
Límite de una función en un punto.	Bloque 3. Análisis Aproximación al concepto de límite de una función en un punto.
Tendencias y continuidad	Bloque 3. Análisis Tendencia y continuidad. Estudio de discontinuidades.
Derivada	Bloque 3. Análisis Aproximación al concepto de derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica de la derivada de la función en un punto. Introducción a la función derivada. Iniciación al cálculo de derivadas. Extremos relativos de una función en un intervalo.

[6] Tal y como ocurría en 3º E.S.O., la referencia a la suma infinita no es directa, pero aparece en los libros de texto del curso.

1.2.1.2 Matemáticas II

Descriptor	Contenido
Límites y asíntotas	Bloque 3. Análisis. Concepto de límite de una función. Calculo de límites. Limites infinitos y en el infinito. Asíntotas.
Continuidad	Bloque 3. Análisis. Continuidad de una función en un punto y en un intervalo. Tipos de discontinuidad.
Derivada	Bloque 3. Análisis. Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto. Función derivada. Calculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función y a la resolución de problemas de optimización.
Estudio gráfico de funciones	Bloque 3. Análisis. Utilización de las propiedades globales y locales de una función para su estudio grafico.

1.2.2 Bachillerato de Ciencias Sociales

1.2.2.1 Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

Descriptor	Contenido
Tipos y características globales de funciones	Bloque 2. Análisis. Funciones reales de variable real. Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de graficas. Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos. Identificación de la expresión analítica y grafica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características. Las funciones definidas a trozos.
Límite de una función en un punto.	Bloque 2. Análisis. Idea intuitiva de límite de una función en un punto. El límite como herramienta para el estudio de las discontinuidades de una función.
Tendencias y asíntotas	Bloque 2. Análisis. Tendencia de una función: limites infinitos y en el infinito. Esbozo de asíntotas horizontales y verticales.

1.2.2.2 Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Descriptor	Contenido
Límite	Bloque 2. Análisis. Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función.
Continuidad	Bloque 2. Análisis. Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad
Asíntotas	Bloque 2. Análisis. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información.
Derivada	Bloque 2. Análisis. Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica. La función derivada como expresión de cambio. Métodos de derivación de funciones elementales. Reglas de derivación. Aplicación de las derivadas al estudio de las propiedades locales de funciones habituales y a la resolución de problemas de optimización relacionados con las ciencias sociales y la economía.
Estudio y representación gráfica de funciones.	Bloque 2. Análisis. Estudio y representación grafica de una función polinómica o racional sencilla a partir de sus propiedades globales.
Ley de los Grandes Números	Bloque 3. Probabilidad y estadística. Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números.

Capítulo 2.
Criterios de evaluación de los límites en el currículo vigente

En este capítulo se exponen los fragmentos de criterios de evaluación del currículo oficial vigente publicado en el Boletín Oficial del Estado para E.S.O. y Bachillerato, que hacen referencia directa o indirecta al tema de límites. No se hace mención a Educación Primaria porque no existe relación suficientemente próxima con los límites en este nivel.

Los criterios de evaluación del currículo presentados en la presente sección, están clasificados por curso, según los descriptores especificados en el Capítulo 1

Estos descriptores son los siguientes: fracción generatriz, ley de los grandes números, suma infinita de una progresión geométrica, funciones (características, propiedades, tipos, estudio gráfico, representación gráfica), límites de una función en un punto, tendencias, continuidad, derivada y asíntotas[7].

2.1 Criterios de evaluación en E.S.O.

2.1.1 Primer ciclo

2.1.1.1 Primer curso

Descriptor	Criterio de evaluación 1	Criterio de evaluación 2
Fracción generatriz	1. Utilizar números naturales y enteros y fracciones y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información. Se trata de comprobar la capacidad de identificar y emplear los números y las operaciones siendo consciente de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo más apropiada (mental, escrita o con calculadora) y transmitir informaciones utilizando los números de manera adecuada. Se debe prestar una especial atención a valorar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas.	2. Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto. Se trata de valorar la capacidad para asignar a las distintas operaciones nuevos significados y determinar cuál de los métodos de cálculo es adecuado a cada situación. Se pretende evaluar, asimismo, cómo se interpretan los resultados obtenidos en los cálculos y comprobar si se adopta la actitud que lleva a no tomar el resultado por bueno sin contrastarlo con la situación de partida.

[7] No se incluye el descriptor de integral puesto que en educación secundaria no se estudia a través de la teoría de límites.

Descriptor	Criterio de evaluación
Ley de los grandes números	7. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica. Se trata de valorar la capacidad para diferenciar los fenómenos deterministas de los aleatorios y, en estos últimos, analizar las regularidades obtenidas al repetir un número significativo de veces una experiencia aleatoria y hacer predicciones razonables a partir de los mismos. Además, este criterio pretende verificar la comprensión del concepto de frecuencia relativa y, a partir de ella, la capacidad de inducir la noción de probabilidad.

2.1.1.2 Segundo curso

Descriptor	Criterio de evaluación
Fracción generatriz	1. Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. Se trata de valorar la capacidad de identificar y emplear los números y las operaciones siendo consciente de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora) y estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos. Entre las operaciones a las que se refiere este criterio deben considerarse incluidas las potencias de exponente natural. Adquiere especial relevancia evaluar el uso de diferentes estrategias que permitan simplificar el cálculo con fracciones, decimales y porcentajes, así como la habilidad para aplicar esos cálculos a una amplia variedad de contextos.

2.1.2 Segundo ciclo

2.1.2.1 Tercer curso

Descriptor	Criterio de evaluación
Fracción generatriz	1. Utilizar los números racionales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. Se trata de valorar la capacidad de identificar y emplear los números y las operaciones siendo conscientes de su significado y propiedades, elegir la forma de cálculo apropiada: mental, escrita o con calculadora, y estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos. Es relevante también la adecuación de la forma de expresar los números: decimal, fraccionaria o en notación científica, a la situación planteada. En los problemas que se han de plantear en este nivel adquiere especial relevancia el empleo de la notación científica así como el redondeo de los resultados a la precisión requerida y la valoración del error cometido al hacerlo.

Descriptor	Criterio de evaluación
Sucesiones	2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos. A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas.
Características y propiedades de funciones y gráficas	5. Utilizar modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Este criterio valora la capacidad de analizar fenómenos físicos, sociales o provenientes de la vida cotidiana que pueden ser expresados mediante una función lineal, construir la tabla de valores, dibujar la gráfica utilizando las escalas adecuadas en los ejes y obtener la expresión algebraica de la relación. Se pretende evaluar también la capacidad para aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica y extraer, de ese modo, la información que permita profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.
Ley de los Grandes Números	7. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades, en casos sencillos. Se pretende medir la capacidad de identificar los sucesos elementales de un experimento aleatorio sencillo y otros sucesos asociados a dicho experimento. También la capacidad de determinar e interpretar la probabilidad de un suceso a partir de la experimentación o del cálculo (regla de Laplace), en casos sencillos. Por ello tienen especial interés las situaciones que exijan la toma de decisiones razonables a partir de los resultados de la experimentación, simulación o, en su caso, del recuento.

2.1.2.2 Cuarto curso- Opción A

Descriptor	Criterio de evaluación
Estudio gráfico de funciones	6. Analizar tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales para obtener información sobre su comportamiento. A la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de las tasas de variación a partir de los datos gráficos o numéricos.
Ley de los Grandes Números	7. Hacer predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades, en casos sencillos. Se pretende medir la capacidad de identificar los sucesos elementales de un experimento aleatorio sencillo y otros sucesos asociados a dicho experimento. También la capacidad de determinar e interpretar la probabilidad de un suceso a partir de la experimentación o del cálculo (regla de Laplace), en casos sencillos. Por ello tienen especial interés las situaciones que exijan la toma de decisiones razonables a partir de los resultados de la experimentación, simulación o, en su caso, del recuento.

2.1.2.3 Cuarto curso- Opción B

Descriptor	Criterio de evaluación
Tipos de funciones. **Estudio gráfico de funciones.**	4. Identificar relaciones cuantitativas en una situación y determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. Este criterio pretende evaluar la capacidad de discernir a qué tipo de modelo de entre los estudiados, lineal, cuadrático, de proporcionalidad inversa, exponencial o logarítmica, responde un fenómeno determinado y de extraer conclusiones razonables de la situación asociada al mismo, utilizando para su análisis, cuando sea preciso, las tecnologías de la información. Además, a la vista del comportamiento de una gráfica o de los valores numéricos de una tabla, se valorará la capacidad de extraer conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Para ello será preciso la aproximación e interpretación de la tasa de variación media a partir de los datos gráficos, numéricos o valores concretos alcanzados por la expresión algebraica.

2.2 Criterios de evaluación en Bachillerato

2.2.1 Bachillerato de Ciencias

2.2.1.1 Matemáticas I

Descriptor	Criterio de evaluación 1	Criterio de evaluación 2
Funciones. Límites. Continuidad. Derivada	4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o graficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. Particularmente, se pretende comprobar la capacidad de traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y extraer conclusiones sobre su comportamiento local o global.	5. Utilizar los conceptos, propiedades y Procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente. Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la grafica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación, locales y globales, en el comportamiento de la función, reconocer las características propias de la familia y las particulares de la función, y estimar los cambios gráficos que se producen al modificar una constante en la expresión algebraica.

2.2.1.2 Matemáticas II

Descriptor	Criterio de evaluación 1	Criterio de evaluación 2
Funciones.	3. Transcribir problemas reales a un lenguaje grafico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas especificas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o grafico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en algebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.	4. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita. Se pretende comprobar con este criterio que los alumnos son capaces de utilizar los conceptos básicos del análisis y que han adquirido el conocimiento de la terminología adecuada y los aplican adecuadamente al estudio de una función concreta.
Límites. Derivadas	5. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización, así como para localizar e interpretar características de funciones expresadas de forma explícita. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones. En concreto, se pretende comprobar la capacidad de extraer conclusiones detalladas y precisas sobre su comportamiento local o global, traducir los resultados del análisis al contexto del fenómeno, estático o dinámico, y encontrar valores que optimicen algún criterio establecido.	

2.2.2 Bachillerato de Ciencias Sociales

2.2.2.1 Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

Descriptor	Criterio de evaluación 1	Criterio de evaluación 2
Funciones	2. Transcribir a lenguaje algebraico o grafico una situación relativa a las ciencias sociales y utilizar técnicas matemáticas apropiadas para resolver problemas reales, dando una interpretación de las soluciones obtenidas. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir algebraica o gráficamente una situación y llegar a su resolución haciendo una interpretación contextualizada de los resultados obtenidos, más allá de la resolución mecánica de ejercicios que solo necesiten la aplicación inmediata de una formula, un algoritmo o un procedimiento determinado.	4. Relacionar las graficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten a ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones mas frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, graficas o expresiones algebraicas. Se trata de evaluar la destreza para realizar estudios del comportamiento global de las funciones a las que se refiere el criterio: polinómicas, fundamentalmente de primer y segundo grado; exponenciales y logarítmicas; valor absoluto; parte entera y racionales sencillas con especial atención a la función de proporcionalidad inversa, sin necesidad de profundizar en el estudio de propiedades locales desde un punto de vista analítico. La interpretación, cualitativa y cuantitativa, a la que se refiere el enunciado exige apreciar la importancia de la selección de ejes, unidades, dominio y escalas.
Tendencia	5. Utilizar las tablas y graficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica, propiciando la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos y el significado de la tendencia de una función en la interpretación de fenómenos económicos y sociales. Este criterio está relacionado con el manejo de datos numéricos y en general de relaciones no expresadas en forma algebraica. Se dirige a comprobar la capacidad para ajustar a una función conocida los datos extraídos de experimentos concretos y obtener información suplementaria mediante técnicas numéricas y graficas.	

2.2.2.2 *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*

Descriptor	Criterio de evaluación
Funciones	3. Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características. Este criterio pretende evaluar la capacidad para traducir al lenguaje de las funciones determinados aspectos de las ciencias sociales y para extraer, de esta interpretación matemática, información que permita analizar con criterios de objetividad el fenómeno estudiado y posibilitar un análisis critico a partir del estudio de las propiedades globales y locales de la función.
Derivada	4. Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para obtener conclusiones acerca del comportamiento de una función y resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico o social. Este criterio no pretende medir la habilidad de los alumnos en complejos cálculos de funciones derivadas, sino valorar su capacidad para utilizar la información que proporciona su cálculo y su destreza a la hora de emplear los recursos a su alcance para determinar relaciones y restricciones en forma algebraica, detectar valores extremos, resolver problemas de optimización y extraer conclusiones de fenómenos relacionados con las ciencias sociales.
Probabilidad.	5. Asignar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos, dependientes o independientes, utilizando técnicas personales de recuento, diagramas de árbol o tablas de contingencia. Se trata de valorar tanto la competencia para estimar y calcular probabilidades asociadas a diferentes tipos de sucesos como la riqueza de procedimientos a la hora de asignar probabilidades a priori y a posteriori, compuestas o condicionadas. Este criterio evalúa también la capacidad, en el ámbito de las ciencias sociales, para tomar decisiones de tipo probabilístico que no requieran la utilización de cálculos complicados.

Capítulo 3.

Ejercicios, problemas y cuestiones tipo sobre límites en los libros de texto

En este capítulo se analizan las actividades tipo de los libros de texto de 3º E.S.O. (C-2), 4ºE.S.O. opción A (C-1-A) y opción B (C-1-B), de 1º Bachillerato de Ciencias Sociales (C-CCSS) y Ciencias (C-C) y 2º Bachillerato de Ciencias Sociales (C+1-CCSS) y Ciencias (C+1-C). Se consideran para este estudio los temas que hacen referencia a los descriptores indicados en los capítulos Capítulo 1 y 0.

A continuación, se muestran los ejemplos más significativos de las actividades tipo encontradas por curso y por tema. Estos ejemplos se presentan clasificados en ejercicio, problema cuestión o situación y se describen brevemente. Entre paréntesis se indica además el número de actividades similares al ejemplo que se encuentran en el tema.

3.1 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en C-2

El libro analizado es para 3º E.S.O. es *Matemáticas* de la editorial Editex

3.1.1 Números Decimales y Potencias

3.1.1.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad se pide que el alumno calcule la fracción generatriz de un número decimal exacto, periódico puro o periódico mixto (5). En dos de estos problemas el enunciado no explicita qué tipo de decimales son los propuestos.

Ejemplo:

5. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos:

a) 0'09333… b) 0'57727… c) 2'21818… d) 0'28181…

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad (3), el alumno debe realizar las operaciones indicadas pero no se le muestran los pasos a seguir (transformar los números decimales en fracción y luego operar). Ahora bien, el libro propone además dos ejercicios en cuyo enunciado sí se explicitan estos pasos.

Ejemplo:

35. Opera y simplifica:

a) $\frac{11}{7}\cdot\frac{1+0'\widehat{3}-0'5}{0'25+\frac{1}{7}}$

b) $\left(\frac{1+0'1\widehat{6}}{1-0'\widehat{3}}\right)^{-2}$

c) $1+\frac{1}{1-0'\widehat{3}}$

d) $\frac{1}{1-\frac{1}{1+0'2}}$

3.1.2 <u>Sucesiones y Progresiones</u>

3.1.2.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, los alumnos únicamente deben conocer y aplicar la fórmula de la suma infinita (4).

Ejemplo:

22. Calcula la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión geométrica:

a) $4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}\ldots$

b) $81,\ 27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9}\ldots$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Actividad de aplicación directa en la que se explicita el método a seguir para calcular la fracción generatriz (usando sumas infinitas) dados algunos números decimales periódicos de los cuáles, además, se dice si son puros o mixtos (7).

Ejemplo:

24. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos utilizando sumas de progresiones geométricas:

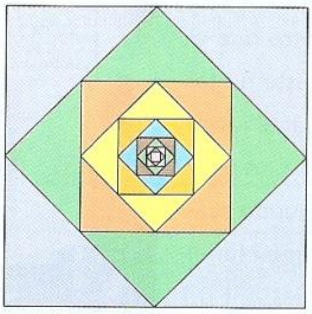
a) 0'5121212... b) 4'2333... c) 72'5666...

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, el alumno debe interpretar el enunciado, identificar y relacionar la pregunta con los contenidos del tema y realizar las operaciones correspondientes (3).

Ejemplo:

■ **93.** Dado un cuadrado de $\sqrt{2}$ cm de lado, inscribimos dentro de él otro cuadrado formado al unir los puntos medios de sus lados. A continuación unimos los puntos medios del segundo cuadrado, construyendo así un tercer cuadrado. Repetimos la operación indefinidamente. Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados así construidos.



3.1.2.2 Otras actividades reseñables

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Es una actividad que aparece de manera asilada pero es interesante ya que el alumno debe interpretar el enunciado y plantear un sistema de ecuaciones para resolver el problema.

Ejemplo:

■ **86.** La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 256. Calcula el octavo término sabiendo que el segundo término es 64.

3.1.3 Funciones

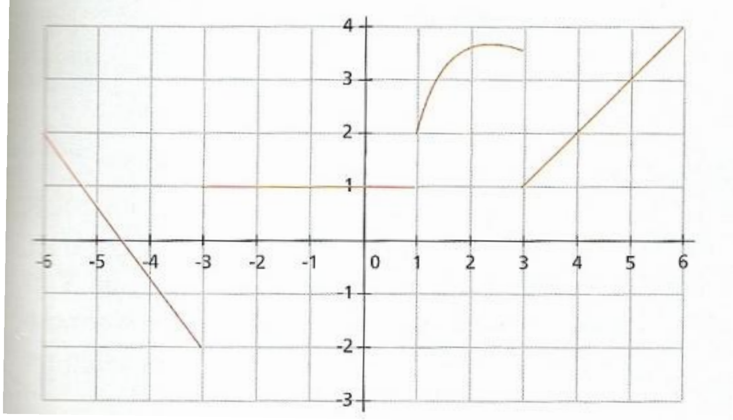
3.1.3.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, se pide al alumno que determine a partir de la gráfica tres características explicitadas en el enunciado: dominio, recorrido y puntos de discontinuidad (3).

Ejemplo:

38. Indica los puntos de discontinuidad de la siguiente función, su dominio y su recorrido:



Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: En esta actividad, se pide al alumno que calcule dos imágenes de una función y en base a estas y al tipo de función que es (que debe conocer dada su expresión analítica), deduzca si es creciente o no y si es continua. (1)

Ejemplo:

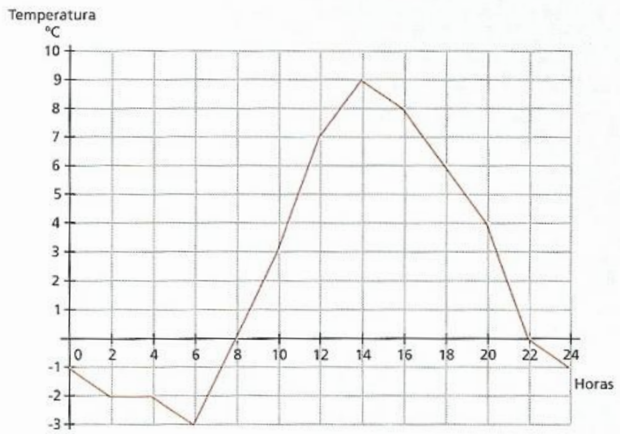
37. Dada la función $f(x) = x + 1$, calcula la imagen de 3 y de 5 y deduce si es creciente o decreciente. ¿Es una función continua?

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de problemas contextualizados, se va guiando el análisis gráfico con pequeñas preguntas que podrían constituir ejercicios. Teniendo en cuenta un criterio de evaluación para 3º E.S.O. según el cual el alumno debe saber interpretar una gráfica de un fenómeno físico y extraer información, se podría utilizar este problema para explicar, por ejemplo, por qué la gráfica de la temperatura debe ser continua (2).

Ejemplo:

40. Hemos tomado la temperatura en nuestra ciudad durante cierto día obteniendo la siguiente gráfica:



a) Indica las horas del día en que se alcanzan las temperaturas máxima y mínima, señalando ambos valores.

b) ¿Se trata de una función continua?

c) Indica los intervalos en los que la función es creciente.

d) Señala las horas, en forma de intervalo, en las que la temperatura disminuyó.

3.1.4 Probabilidad

3.1.4.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Con esta actividad se guía al alumno para que trabaje los resultados obtenidos y expresados en la tabla de manera conveniente (hallar frecuencias relativas) para relacionarlos con la Ley de los grandes números y que razone si se cumple o no, que conclusiones se pueden extraer, etc. Todo mediante una pregunta abierta sobre la opinión que le merece dicha relación (2).

Ejemplo:

10. Lanzamos una moneda y obtenemos los siguientes resultados:

c	c	x	c	x	c	c
c	c	c	x	c	c	x
x	c	c	x	c	x	x
c	x	x	c	x	c	c
c	c	x	c	c	x	x
c	x	c	c	c	c	c

Calcula la frecuencia relativa de los sucesos A = {Salir cara} y B = {Salir cruz}. Teniendo en cuenta la Ley de los grandes números, ¿qué opinas de los resultados obtenidos?

3.2 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en C-1-A

El libro utilizado para el análisis es *Matemáticas opción A* de la editorial Editex.

3.2.1 Los números reales

3.2.1.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Es un ejercicio de aplicación directa de los métodos de obtención de las fracciones generatrices (3). Hay dos actividades más en las que el enunciado pide que el alumno encuentre ejemplos de fracciones cuya expresión decimal sea un número decimal periódico puro o mixto. La diferencia entre estos dos tipos de ejercicios es que en este último, es el alumno quien debe pensar primero en un número decimal periódico puro o mixto, ya que no lo proporciona el enunciado, y luego transformarlo.

Ejemplo:

□ **22.** Expresa los siguientes números decimales en forma de fracción:

a) 3'56	d) 2'333333...	g) 0'515151...
b) 2'9999...	e) 0'344444...	h) 0'454545...
c) 3'67999...	f) 0'324545...	i) 3'123232...

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En esta actividad se pauta la manera de realizar las operaciones propuestas, previo cálculo de la función generatriz (1).

Ejemplo:

26. Realiza las siguientes operaciones. Si no puedes realizarlas directamente, pasa primero los números decimales a fracción y luego efectúa las operaciones, pasando el resultado de nuevo a número decimal:

a) $3'4\overline{1} + 2'37\overline{8}$

b) $5'2\overline{8} + 5'67\overline{3}$

c) $5'2\overline{3} \cdot (-5'\overline{3}) - 4'\overline{27}$

3.2.2 Estudio Gráfico de Funciones

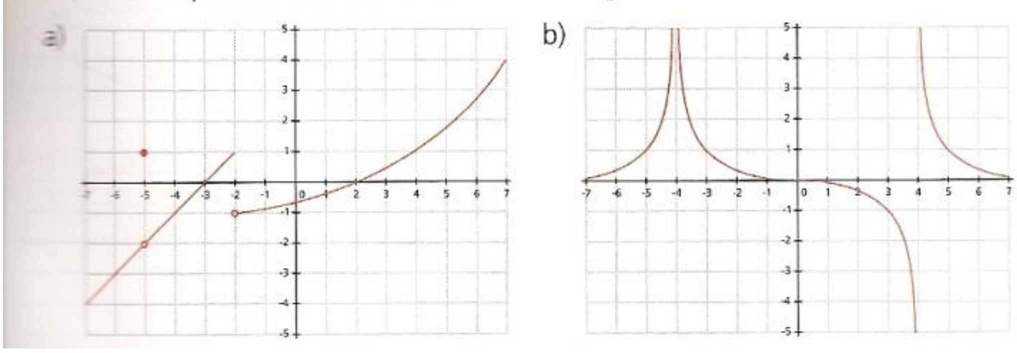
3.2.2.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de cuestión, se pide a los alumnos que clasifiquen las discontinuidades de las funciones propuestas, para lo cual deberán razonar e identificar dichas discontinuidades con su registro teórico (2).

Ejemplo:

7. Clasifica los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:



Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En tipo de actividad se pide determinar las tendencias indicadas en el enunciado de las funciones que se proponen (4).

Ejemplo:

□ **32.** Determina la tendencia de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ cuando $x \to 2^{+}$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x^2-2}$ cuando $x \to +\infty$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x} + 1$ cuando $x \to -\infty$

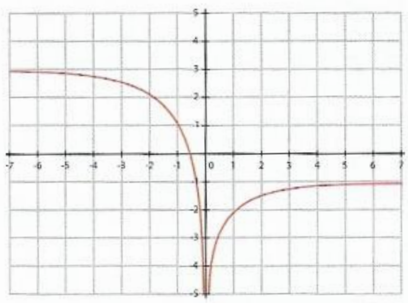
d) $i(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$ cuando $x \to +\infty$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Con este tipo de actividad se pretende que el alumno comprenda y sepa qué tendencias conviene estudiar y por qué (2). La diferencia con los ejercicios anteriores es que en este problema, no se expresa las tendencias que los alumnos han de estudiar, sino que es una decisión que debe tomar el alumno.

Ejemplo:

■ Determina las tendencias de la siguiente función:



3.2.3 Funciones Algebraicas y Exponenciales

3.2.3.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad se pide al alumno que represente gráficamente determinadas funciones (polinómicas, exponenciales, parabólicas, racionales). A continuación, se pide un estudio gráfico, para lo cual el alumno debe saber qué características analizar: dominio, recorrido, monotonía, convexidad y continuidad (9).

Ejemplo:

3. Representa las siguientes funciones y estúdialas gráficamente:

a) $f(x)=\begin{cases} -2x+1 & \text{si } -3<x<-1 \\ 3 & \text{si } -1\le x\le 2 \\ -x+2 & \text{si } 2<x<5 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} 1-2x & \text{si } x<-1 \\ x & \text{si } 0\le x<2 \\ 11-x & \text{si } 2\le x<5 \\ x+1 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad el enunciado sólo pide que se represente la función racional dada (4). Se espera que el alumno determine en primer lugar las asíntotas para que la representación sea más sencilla. En algunos de estos ejercicios, incluso el cálculo de las asíntotas se pide expresamente.

Ejemplo:

■ Representa la función $f(x)=\dfrac{1}{x-3}+1$.

3.2.4 Probabilidad

3.2.4.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de cuestiones pretende que el alumno reflexione sobre los resultados de un experimento, relacionándolos con la Ley de los grandes números, y exponga sus conclusiones en base a ello (3).

Ejemplo:

□ **27.** Se lanza una moneda al aire 1 000 veces y se anotan los resultados, que se resumen en la siguiente tabla:

Cara	Cruz	Total
223	777	1 000

¿Crees que la moneda está trucada?

3.2.4.2 Otras actividades reseñables

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de cuestión es interesante porque hace hincapié en un error bastante común: como la probabilidad de que salga cara es la mitad y ya han salido muchas veces cara, la probabilidad de que salga cruz en la siguiente tirada será mayor. Resulta interesante porque se puede utilizar para hacer pensar y entender al alumno que el número de veces que sale cara y cruz tiende a estabilizarse y ser el mismo cuando se aumenta mucho el número de lanzamientos y sin embargo esta no es la situación que se describe en el enunciado. Es otra manera de preguntar por la Ley de los grandes números.

Ejemplo:

28. Dos amigos están jugando con una moneda a ver quien acierta si sale cara o cruz. Después de seis lanzamientos, en todas las tiradas ha salido cara. ¿Crees que la probabilidad de que salga cruz en el siguiente resultado es mayor? Razona tu respuesta.

3.3 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en C-1-B

El libro analizado *Matemáticas opción B.* de la editorial Editex.

Los temas *Los Números Reales*, *Estudio Gráfico de Funciones y Probabilidad* son idénticos en la opción A y B de 4º E.S.O. Por este motivo, se incluyen únicamente los temas de *Funciones Algebraicas y Funciones Exponenciales*.

3.3.1 Funciones Algebraicas

3.3.1.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: El libro propone actividades como las del ejemplo en las que se pide representar y estudiar gráficamente funciones a trozos (4) y racionales (6).

Ejemplo:

21. Representa las siguientes funciones y estúdialas:

a) $f(x)=\begin{cases} x-5 & \text{si } x\le -1 \\ -6 & \text{si } -1<x<2 \\ 2x-7 & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si } -5\le x<-1 \\ -x+3 & \text{si } -1\le x\le 2 \\ x-5 & \text{si } 2\le x<5 \end{cases}$

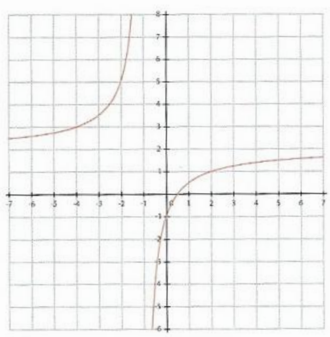
c) $h(x)=\begin{cases} 3x+5 & \text{si } x<-2 \\ 2 & \text{si } -2\le x<0 \\ -x+1 & \text{si } 0\le x\le 3 \\ x-5 & \text{si } x>3 \end{cases}$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: A pesar de ser una actividad descontextualizada, el alumno debe saber qué pasos seguir (asíntotas y traslaciones) para hallar la ecuación de la hipérbola (2). Una variante a esta actividad es en vez de dar como dato la gráfica de la función, dar la ecuación de las asíntotas y un punto de la función.

Ejemplo:

42. Calcula la ecuación de la hipérbola siguiente:



3.3.2 Funciones exponenciales

3.3.2.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En el libro se proponen actividades donde se pide la representación y estudio gráfico de funciones exponenciales (6) y logarítmicas (5).

Ejemplo:

11. Representa y estudia las siguientes funciones logarítmicas:

a) $f(x) = \log(x-5)$ b) $g(x) = \log(x) + 5$ c) $h(x) = \log(x-1) + 2$

3.1 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en C-CCSS.

El libro analizado es *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales* de la editorial Editex.

3.1.1 Números Reales

3.1.1.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Como en cursos anteriores, uno de los ejercicios típicos es realizar operaciones con números decimales que previamente hay que transformar en fracción (2).

Ejemplo:

■ 6. Expresa cada decimal en forma de fracción, opera y el resultado final conviértelo en número decimal:

a) $3,\widehat{1} + 5,2\widehat{1} + 2,8$ b) $(5,\widehat{4} - 3,\widehat{42}) \cdot 2,7$ c) $6,1\widehat{4} : 3,\widehat{4} \cdot 2,44$ d) $12,5 + 3,7\widehat{8} : 1,4$

3.1.1.2 Otras actividades reseñables

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En esta actividad, el alumno debe deducir que la manera de resolver el ejercicio es transformar los números decimales a fracciones y hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores. Se trata de un problema interesante en el que además del concepto de fracción generatriz, necesitan comprender y aplicar el mínimo común múltiplo.

Ejemplo:

1. En una determinada ciudad se han contabilizado al final del año 4 250 vehículos, de los cuales una parte han sido adquiridos durante ese año. De los no adquiridos durante ese año el 54,545454...% son coches y el 10,2777...% motocicletas. ¿Cuántos vehículos se adquirieron ese año?

3.1.2 Funciones Reales. Propiedades Globales

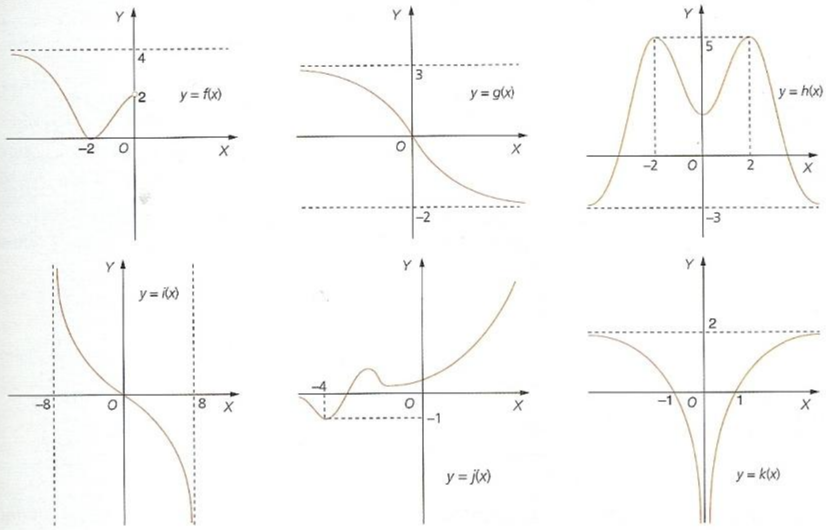
3.1.2.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de ejercicio, se pide un estudio gráfico de la función centrándose en determinados puntos como la acotación, tendencias, etc (2)

Ejemplo:

5. Estudia la acotación, simetría, tendencias y la posible existencia de supremo, ínfimo y extremos absolutos en cada una de las siguientes funciones:



Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad es un problema contextualizado en el que hay que deducir qué aspectos de la gráfica es preciso analizar para responder a las preguntas que se plantean. Además, estas respuestas han de darse en el contexto del problema (1).

Ejemplo:

7. La gráfica siguiente muestra los beneficios en miles de euros de una empresa desde el momento en que se fundó.
Contesta razonadamente a cada una de las siguientes cuestiones:

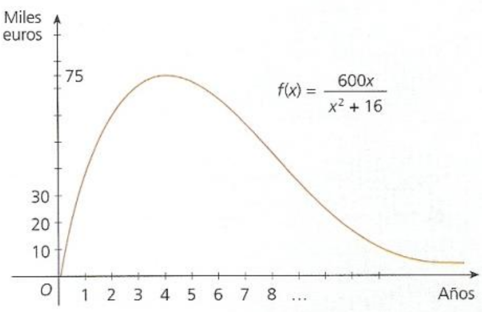
a) ¿Qué variables se relacionan?

b) ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función? ¿Qué sentido tienen en el contexto del problema?

c) ¿Al cabo de cuántos años tiene la empresa beneficios máximos? ¿A cuánto ascienden estos?

d) ¿Cómo varían los beneficios los primeros años? ¿Y después?

e) ¿Crees que habrá un punto en el que no existan ni beneficios ni pérdidas?



Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Se trata de una actividad en la que el alumno debe plantearse en qué aspectos debe fijarse de la función para poder discutir y decidir qué función es la más adecuada según el contexto (2).

Ejemplo:

■ 17. Una empresa *Cable I* ofrece una tarifa de utilización de Internet de 15 euros mensuales. La empresa *Cable II* ofrece una tarifa de 0,05 euros por hora. Discute qué tarifa te parece la más conveniente a la hora de elegir.

3.1.3 Funciones Racionales

3.1.3.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Se trata de problemas contextualizados en los que deben analizar diversos aspectos de la función entre los cuales están las tendencias y asíntotas (3).

Ejemplo:

1. La función:

$$f(x) = \frac{400x + 400}{x + 18}$$

nos da el número de pulsaciones por minuto de una persona que está aprendiendo a teclear en un ordenador en función del número de clases particulares, de una hora, a las que asiste.

a) ¿Cuántas pulsaciones por minuto da al comienzo de las clases y cuántas dará al cabo de 3, 5 y 20 clases recibidas?

b) ¿Cuántas horas debe practicar para dar 300 pulsaciones por minuto?

c) Representa la gráfica.

d) A la vista de la gráfica responde a las siguientes cuestiones:

- ¿A partir de qué número de clases alcanza más de 300 pulsaciones por minuto?
- ¿Qué número de clases debe recibir para alcanzar las 500 pulsaciones por minuto?
- ¿Qué número máximo de pulsaciones por minuto puede llegar a alcanzar?

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de ejercicio pretende que el alumno sepa representar una función racional (2). En un ejercicio se explicita que el cálculo de las asíntotas sea previo a la representación. En el otro, se pide las asíntotas a partir de la representación gráfica.

Ejemplo:

■ 9. Representa gráficamente las siguientes funciones, determinando previamente sus respectivas asíntotas.

a) $y = \dfrac{4x}{x+1}$ b) $y = \dfrac{6x-11}{2x-4}$ c) $y = \dfrac{4x+7}{4x+8}$ d) $y = \dfrac{-2x-8}{x+2}$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de ejercicio, se pretende que el alumno sepa aplicar transformaciones elementales a las funciones en lo que a la representación gráfica se refiere (2).

Ejemplo:

■ 12. A partir de la gráfica de la función $y = \dfrac{2}{x}$ representa las gráficas de las funciones: $y = \dfrac{2}{x} - 1$, $y = \dfrac{2}{x} + 2$

3.1.4 <u>Funciones Exponenciales, Logarítmicas y Trigonométricas</u>

3.1.4.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tema son pocos los problemas que hacen referencia a límites (2). El objetivo de estos problemas es que el alumno sepa obtener información de la función en un contexto práctico a partir de su expresión analítica, que la sepa representar y que sepa interpretar sus tendencias.

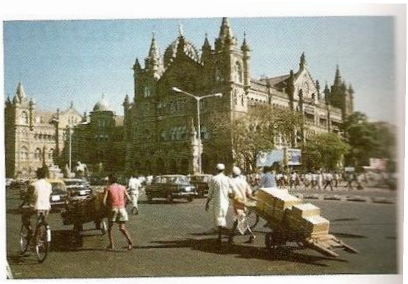
Ejemplo:

5. La expresión $P(x) = \dfrac{22{,}5}{1 + 0{,}5e^{-0{,}01981x}}$ proporciona la población de un país, desde el año 1860, en millones de personas. Determina:

a) La población del país en el año 1860.

b) La población existente en los años 1895, 1930 y 2000.

c) Representa estos y otros valores obtenidos, comprueba que con este modelo de población el número de personas siempre aumenta, pero nunca llega a alcanzar el valor límite.



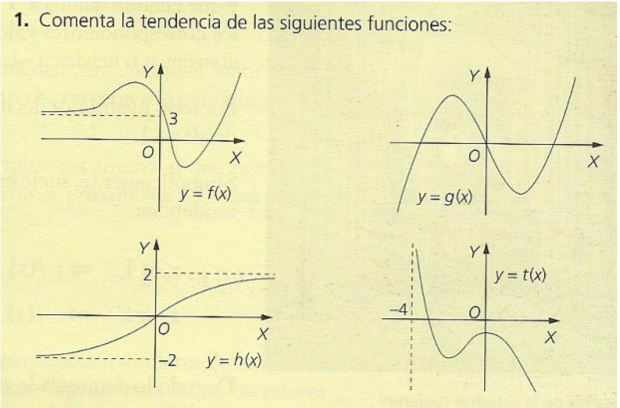
3.1.5 <u>Límites de Funciones. Continuidad.</u>

3.1.5.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Se trata de una actividad propuesta al inicio del tema para recordar el concepto de tendencia. En problemas posteriores se pide estudiar las tendencias en el contexto extramatemático de dichos problemas.

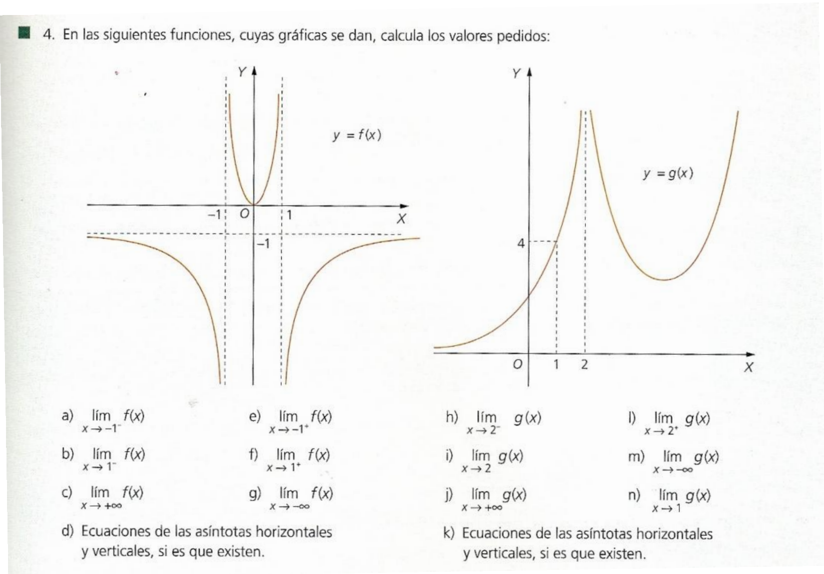
Ejemplo:



Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En la primera parte del tema, se introducen los conceptos de límite, límites laterales, límites infinitos, en el infinito y asíntotas. En algunas secciones hay actividades resueltas (4) y en todas ellas, los valores que se piden han de obtenerse a partir de las gráficas de funciones que se adjuntan**.** Las actividades propuestas aparecen al final del tema y, por lo general, se piden todos estos conceptos, tal y como se aprecia en el ejemplo (3).

Ejemplo:



Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: La siguiente parte del tema, consiste en la resolución analítica de límites sencillos. Se propone una actividad resuelta con 21 límites similar a la que se propone al final del tema (2).

Ejemplo:

■ 6. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 0} 2$

b) $\lim_{x\to +\infty} x^{-5}$

c) $\lim_{x\to -3} \frac{1}{x^2}$

d) $\lim_{x\to -\infty} x^5$

e) $\lim_{x\to -\infty} (-7)$

f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{10}}$

g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^{10}}$

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{13}}$

i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{13}}$

j) $\lim_{x\to -1} x^6$

k) $\lim_{x\to 0^-} x^3$

l) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}$

m) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^7}$

n) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^7}$

o) $\lim_{x\to -\infty} x^6$

p) $\lim_{x\to 1} x$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: La tercera parte del tema es resolución de indeterminaciones. No se proponen actividades resueltas como en las secciones anteriores, sino que directamente las actividades correspondientes están al final del tema. Los primeros ejercicios proponen apartados en los cuales aparecen sólo determinado tipo de indeterminación ($\frac{\infty}{\infty}$ ó $\frac{0}{0}$). Conforme se va avanzando, los ejercicios incluyen cada vez más indeterminaciones y son del tipo a la actividad que se pone de ejemplo (5).

Ejemplo:

■ 13. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x-2}$

b) $\lim_{x\to +\infty} [\sqrt{4x^2-6x+3} - 2x]$

c) $\lim_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3+4x^2-2x-4}{2x^2+x-3}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-x}$

f) $\lim_{x\to 0} [1+3x]^{\frac{2}{x}}$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividades el fin es analizar la continuidad de una función a trozos, para lo que a veces se ayuda al alumno pidiéndole, en primer lugar, que halle los límites necesarios para poder abordar correctamente dicho estudio. En alguna de estas actividades, se pide además comprobar los resultados obtenidos representando gráficamente la función. (6)

Ejemplo:

■ 19. Dada la función f, calcula:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 - 3x & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ -2x & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \;;\; \lim_{x \to 0^+} f(x) \;;\; \lim_{x \to 1} f(x) \;;\; \lim_{x \to 3} f(x) \;;\; f(0) \;;\; f(1) \;\text{ y }\; f(3).$$

A la vista de los resultados obtenidos, estudia la continuidad de esta función.

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad se pide al alumno que resuelva un problema contextualizado. Normalmente, las preguntas suelen estar totalmente ligadas al contexto del problema, se exige que el alumno razone sus respuestas y siempre suele preguntarse por el límite cuando la variable independiente tiende a más o menos infinito. En alguno de estos problemas, no obstante, también se pide en preguntas intermedias el cálculo de determinados límites aunque no son de interés en el contexto del problema. (6)

Ejemplo:

■ 14. Un estudio biológico establece que el número de animales de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función:

$$F(t) = \frac{15\,000\,t + 10\,000}{2t + 2} \qquad (t \text{ son años transcurridos})$$

Halla:

a) El tamaño actual de la población.

b) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Si es así, ¿en qué número de individuos?

3.1.5.2 Otras actividades reseñables

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Al final de los temas, se suelen proponer actividades usando las nuevas tecnologías, en este caso, el programa Derive. Se trata de un ejercicio de cálculo de límites con indeterminaciones.

Ejemplo:

NUEVAS TECNOLOGÍAS

Derive nos permite calcular límites de funciones, límites laterales y estudiar la continuidad de funciones dadas.

Límites con Derive

- **Cálculo de límites**

Vamos a calcular con Derive los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{2+x}{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{2x}$$

3.1.6 <u>Introducción a las Derivadas y a sus Aplicaciones</u>

3.1.6.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: En lo que expresamente a límites se refiere, sólo hay esta cuestión que además se encuentra al inicio del tema. El objetivo es familiarizar al alumno con la notación y el cálculo de la derivada a través de la definición.

Ejemplo:

1. Calcula los siguientes límites:

a) $f(x) = 3x + 5;\quad \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

b) $g(x) = 4x^2;\quad \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividades, se pide hallar la derivada de una función en un punto concreto a través de la definición de derivada. (5)

Ejemplo:

1. Dada la función $f(x) = -2x$, calcula la derivada en los puntos de abscisa $x_0 = 3$ y $x_0 = 4$.

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividades, se pide representar gráficamente la función dada. El alumno debe saber que para poder realizar el estudio correctamente, debe calcular el dominio, recorrido, monotonía, tendencias, etc. (4)

Ejemplo:

11. Representa gráficamente la función $y = x^3 - 3x - 2$.

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de problema contextualizado, el alumno debe razonar sobre el crecimiento y tendencias de la función y dar una respuesta adecuada dentro del contexto de dicho problema (2)

Ejemplo:

■ 38. Se ha comprobado que la evolución desde el año 1980 ($t = 0$) del número de ejemplares de lince ibérico sigue la ley:

$$N = \frac{t+2}{t+1} \quad \text{(con } N \text{ miles de ejemplares y } t \text{ tiempo en años)}$$

Representa gráficamente esta función y haz un estudio de la evolución de esta especie animal.

3.2 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en C-C

El libro de texto analizado es *Matemáticas I, 1 Bachillerato* de la editorial Santillana.

3.2.1 Números Reales

3.2.1.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Tal y como sucedía en cursos anteriores, una de las actividades tipo es el cálculo de la fracción generatriz de varios números decimales dados (2).

Ejemplo:

53 Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

a) $0,2$	d) $8,0002$	g) $0,01$
b) $3,\widehat{5}$	e) $42,\widehat{78}$	h) $5,\widehat{902}$
c) $2,3\widehat{7}$	f) $10,5\widehat{23}$	i) $0,01\widehat{57}$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: La otra actividad tipo de este tema es hallar una operación en la que aparecen números decimales que tienen que transformar previamente en fracciones. Este paso es además indicado en el enunciado (2).

Ejemplo:

54 Efectúa, utilizando las fracciones generatrices.

a) $1,\widehat{3} + 3,4$ d) $4,\widehat{5} + 6,\widehat{7}$

b) $10,2\widehat{5} - 5,\widehat{7}$ e) $3,\widehat{46} + 4,2\widehat{95}$

c) $1,\widehat{36} + 8,\widehat{25}$ f) $3,\widehat{21} + 4,3\widehat{12}$

3.2.2 <u>Funciones elementales</u>

3.2.2.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tema se da un repaso a las funciones elementales. En el estudio de las funciones racionales, aparece el concepto de asíntota, que el alumno debe dominar para la representación gráfica (2).

Ejemplo:

5 Representa gráficamente las siguientes funciones de proporcionalidad inversa.

a) $y = \dfrac{3}{x}$ b) $y = -\dfrac{1}{2x}$

3.2.2.2 Otras actividades reseñables

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad tiene por objetivo introducir el concepto de límite y de límites laterales de una función. No es una actividad tipo, pero sin embargo es interesante para que los alumnos vayan familiarizándose con el comportamiento de las funciones a trozos en los puntos que delimitan los intervalos del dominio y que estudiarán en temas posteriores.

Ejemplo:

77 Representa la función.

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 + 3x| & \text{si } x < -1 \\ -4 & \text{si } x = -1 \\ -x + 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Estudia el valor que toma la función en los puntos próximos a -1, completando las tablas.

Izquierda de -1	-2	$-1{,}5$	$-1{,}1$	$-1{,}05$
$f(x)$				

Derecha de -1	0	$-0{,}5$	$-0{,}9$	$-0{,}95$
$f(x)$				

Describe lo que le sucede a la función en las proximidades de -1.

3.2.3 Límite de una función

3.2.3.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este libro comienza el tema con el cálculo de límites de sucesiones. Los primeros ejercicios son límites dado el término general de la sucesión (4).

Ejemplo:

7 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2 - 1}{n^3} \cdot \dfrac{4n^4}{2n^4 + 3} \right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \dfrac{n^2 + 7}{2n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{3n^2 + 1}{n^2 + n + 2}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-1} - \dfrac{n-1}{n+1} \right)$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad pretende que el alumno comprenda el significado de límite y cómo se puede calcular de manera aproximada. Hay dos variantes para este ejercicio, o bien se incita a utilizar la calculadora (3) o bien con ayuda de una tabla (3).

Ejemplo:

35 Calcula el límite de la siguiente sucesión con ayuda de la tabla.

$$a_n = \frac{n^2-1}{2n+1}$$

n	5	50	500	5.000	50.000
a_n					

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: La siguiente parte del tema, consiste en la resolución de indeterminaciones en el cálculo de límites de sucesiones: $\frac{\infty}{\infty}$ (3), $\frac{0}{0}$ (2), $\infty - \infty$ (4), 1^{∞} (2) . El ejercicio típico es como el del ejemplo.

Ejemplo:

37 Halla los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+n}{n-3} - \frac{n^2+2}{n-1} \right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-3n+2}{3n} - \frac{n^2}{n+3} \right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2n - \frac{4n^2-2n+7}{2n+1} \right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{6n^2+1}{2n+4} - \frac{9n^2-5}{3n+6} \right)$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En el siguiente tipo de ejercicio, se pide el cálculo del límite de la función en un punto. La mayoría de las veces, el enunciado indica la pertinencia de hacer los límites laterales (7).

Ejemplo:

59 Calcula los límites laterales y el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En el siguiente tipo de ejercicio, se pide el cálculo de las asíntotas de la función y de sus ramas infinitas. En la mayoría, se pide también decidir la posición que tienen entre sí (9).

Ejemplo:

72 Obtén todas las ramas infinitas y las asíntotas de las funciones, y decide la posición que tienen entre sí.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8}$

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, se pretende que el alumno sepa interpretar una tabla de valores y a partir de la misma, intuir el comportamiento de la función en relación con las asíntotas y ramas infinitas (3)

Ejemplo:

64 Observa las tablas de valores de la función.

$$f(x) = \frac{4x^2 - 5x}{2x^2 + 7}$$

x	1	10	100	1.000	10.000
$f(x)$	−0,11	1,69	1,974	1,9975	1,99975

x	−1	−10	−100	−1.000	−10.000
$f(x)$	1	2,17	2,024	2,0025	2,00025

¿Es cierto que $y = 2$ es una asíntota? Cuando x tiende a $+\infty$, ¿está la función por encima o por debajo de la asíntota? ¿Qué sucede cuando x tiende a $-\infty$?

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: La siguiente parte del tema, consiste en la resolución de indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones: $\frac{\infty}{\infty}$ (3) , $\frac{0}{0}$ (2), $\infty - \infty$ (2), 1^{∞} (2) . El ejercicio típico es como el del ejemplo.

Ejemplo:

48 Encuentra el valor de:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3}\right)$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}\right)$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividades, el fin es analizar la continuidad de una función, generalmente en su dominio. En muchos de estos ejercicios, se pide además especificar el tipo de discontinuidad si es que la función tiene discontinuidades (7).

Ejemplo:

81 Estudia la continuidad de las funciones en $x = 3$, y si presentan discontinuidad, decide de qué tipo de discontinuidad se trata.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x - 1} & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \ln (x - 2) & \text{si } x < 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \\ sen (x - 3) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ x - 15 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de ejercicio pretende que el alumno interiorice el concepto de límite, asíntotas y discontinuidad y no sólo sepa calcularlos analíticamente o determinarlos a partir de una gráfica, sino que sea capaz de imaginarlos y representarlos (7). Una actividad tipo con discontinuidades es la del ejemplo.

Ejemplo:

78 Dibuja una función que sea continua, salvo en $x = -1$, que tenga un salto infinito y que tenga en $x = 3$ un salto finito.

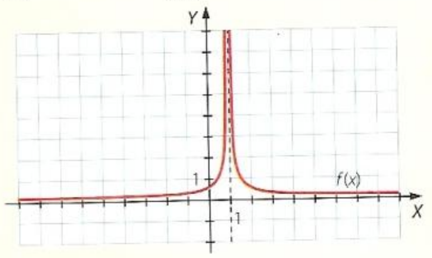
Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de ejercicio pretende que el alumno se familiarice con el estudio gráfico de funciones y sea capaz de analizar las tendencias de las mismas (4)

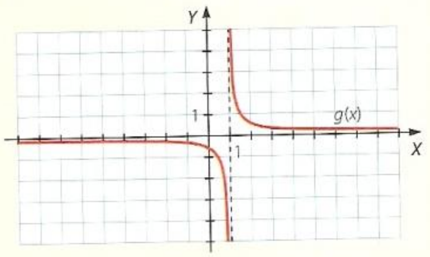
Ejemplo:

55 Observa las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, y halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)$



b) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ $\lim_{x\to 1^+} g(x)$



Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad pretende hacer pensar al alumno, que este intuya aplicaciones prácticas de los límites y que aprenda a darles un significado. (3)

Ejemplo:

100 La famosa fórmula $M = \dfrac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ se debe a Einstein, y expresa la masa M de un cuerpo en función de su velocidad v, siendo c la velocidad de la luz (300.000 km/s).

Calcula el límite de la masa M cuando v tiende a c. A la vista de ese resultado, ¿crees que un cuerpo puede alcanzar esa velocidad?

3.2.4 <u>Derivada de una función</u>

3.2.4.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, se pide utilizar la definición de derivada para calcular la derivada de la función en un punto concreto. Se pretende que el alumno se familiarice con la definición de derivada (6)

Ejemplo:

43 Aplica la definición de derivada en un punto para calcular las derivadas de las funciones en los puntos que se indican.

a) $y = 3x - 1$ en $x = 2$

b) $y = x^2 + x$ en $x = 3$

c) $y = \dfrac{4x + 3}{2}$ en $x = -1$

d) $y = \dfrac{6}{x}$ en $x = 1$

e) $y = (x - 1)^2$ en $x = -2$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, se pide utilizar la definición de derivada para calcular la función derivada de una dada. Se pretende que el alumno se familiarice con la definición de derivada (7)

Ejemplo:

51 A partir de la definición, calcula las funciones derivadas de las funciones que se indican.

a) $y = 2x + 3$

b) $y = \dfrac{2x - 1}{4}$

c) $y = x^3$

d) $y = 2x^2 - 3x$

e) $y = \dfrac{12}{x}$

f) $y = (3x^2 + 2)^2$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad se pretende que el alumno se familiarice con las posibilidades que ofrece la derivada en cuanto a la representación de funciones, y para ello, se le guía indicándole las características que debe analizar. (2)

Ejemplo:

96 Dada la función $y = x^3 + 6x^2 - 36x + 29$, resuelve.

a) Determina su dominio.

b) Halla sus asíntotas.

c) ¿Tiene puntos de corte con los ejes? ¿Cuáles son?

d) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Halla los máximos y mínimos.

f) Representa la función.

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad conlleva un paso más que la anterior, puesto que ya se da por hecho que el alumno sabe qué puntos debe analizar para poder representar correctamente las funciones dadas. (4)

Ejemplo:

99 Estudia y representa estas funciones racionales.

a) $y = \dfrac{5x + 1}{x - 2}$

b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

c) $y = \dfrac{x^2}{2 - x}$

d) $y = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6}$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad tiene por objetivo que el alumno sepa cuándo una función es continua y derivable pero además, conozca los pasos a seguir y puntos que debe estudiar para realizar correctamente este análisis (3).

Ejemplo:

87 Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 9 & \text{si } x < 3 \\ 2x^2 - 4x & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 2^{10-x} - 2 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

3.2.4.2 Otras actividades reseñables

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Resulta interesante porque se pide al alumno una demostración de carácter teórico, a la cual normalmente no están acostumbrados ya que este tipo de actividad escasea en el libro de texto.

Ejemplo:

118 Sea una función que no es continua en $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$$

Demuestra que la función no puede ser derivable en ese punto estudiando el límite.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

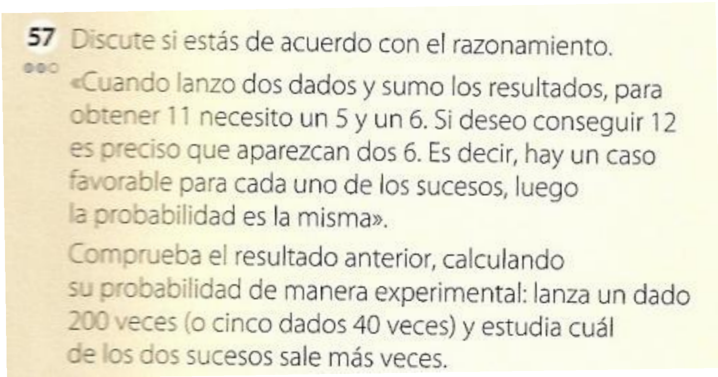
3.2.5 Probabilidad

3.2.5.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Como es habitual de otros cursos, el tipo de actividad que se propone en relación a la Ley de los grandes números es una cuestión en la que se pide al alumno que la relacione los resultados obtenidos de un experimento que o bien se aportan (2), o bien debe realizar el alumno, como en el ejemplo.

Ejemplo:



57 Discute si estás de acuerdo con el razonamiento.

«Cuando lanzo dos dados y sumo los resultados, para obtener 11 necesito un 5 y un 6. Si deseo conseguir 12 es preciso que aparezcan dos 6. Es decir, hay un caso favorable para cada uno de los sucesos, luego la probabilidad es la misma».

Comprueba el resultado anterior, calculando su probabilidad de manera experimental: lanza un dado 200 veces (o cinco dados 40 veces) y estudia cuál de los dos sucesos sale más veces.

3.3 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en C+1-CCSS.

El libro analizado es *Matemáticas, 2 Bachillerato aplicadas a las Ciencias Sociales II* de la editorial Santillana.

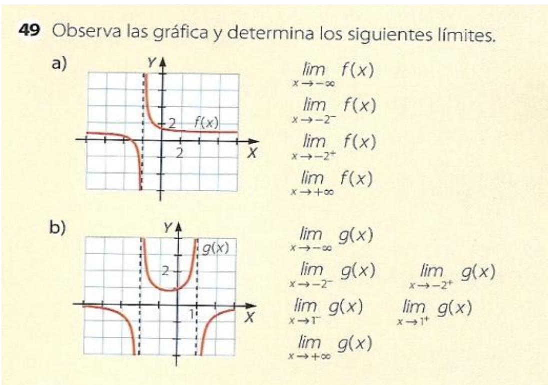
3.3.1 Límites y Continuidad

3.3.1.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de ejercicio se pide calcular a partir de la gráfica de una función determinados límites propuestos. Otra variante de este ejercicio, es preguntar la continuidad en un punto concreto. (9)

Ejemplo:



49 Observa las gráfica y determina los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-2^-} f(x)$ $\lim_{x\to-2^+} f(x)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ $\lim_{x\to-2^-} g(x)$ $\lim_{x\to-2^+} g(x)$ $\lim_{x\to1^-} g(x)$ $\lim_{x\to1^+} g(x)$ $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de ejercicio, se pide hallar límites. Hay ejercicios con límites sencillos (6), límites con indeterminación $\frac{k}{0}$ o de funciones a trozos (8), con indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ (4), con indeterminación $\infty - \infty$ (3), con indeterminación $\frac{0}{0}$ (2), con indeterminación 1^{∞} (2) y mezcla de las anteriores (3). El tipo de ejercicio es el siguiente.

Ejemplo:

34 Halla los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-12x)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-4x)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-\dfrac{3}{x^2}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x^2)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-3)^x$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+5x^2-3)$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x^2+1)^2+4x\right)$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+4^x)$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{1-x}$

l) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3^{-x})$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)$

n) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{1-x}$

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, se realiza una pregunta contextualizada para lo cual es preciso que el alumno resuelva un límite sencillo. Se pide que el alumno razone su respuesta basándose en la interpretación del concepto de límite (8).

Ejemplo:

41 Una empresa de transporte estima que sus ganancias, en miles de euros, durante los próximos años seguirán la fórmula:

$$g(t)=\frac{64.000+5.000t}{5t+5}$$

donde la variable $t = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ representa el tiempo en años medido a partir del presente. ¿Se estabilizan las ganancias cuando t crece? ¿Hacia qué valor? Razona la respuesta.

(Canarias. Junio 2003. Prueba A. Pregunta 3)

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En el libro, abundan los problemas descontextualizados en los que se pide o bien estudiar la continuidad de una función a trozos dada (16) o bien, determinar los valores de uno o varios parámetros para que la función a trozos dada sea continua en su dominio o en un intervalo concreto (6). Estos mismos problemas, se contextualizan dando lugar a problemas del estilo al del ejemplo (7) en los que además suele ser común que se haga una pregunta adicional cuya respuesta implique la resolución de un límite. También hay problemas descontextualizados en los que se pide o bien estudiar la continuidad de la función a trozos en un punto o puntos concretos (12) o bien determinar los valores de uno o varios parámetros para que la función a trozos sea continua en un punto o puntos concretos (5) en vez de en su dominio o en un intervalo.

Ejemplo:

99 El precio, en euros, de x litros de aceite comprados en una almazara viene dado por la función:

$$P(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ \sqrt{ax^2 + 2.000} & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

a) Determina el valor de la constante a para que la función $P(x)$ sea continua.

b) Si se comprasen muchísimos litros de aceite, ¿a cuánto saldría aproximadamente el precio de cada litro?

(Murcia. Septiembre 2001. Bloque 2. Cuestión 2)

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación

Descripción: En este tipo de cuestión se pide al alumno que analice si existe alguna discontinuidad evitable y determine cómo se podría evitar (2).

Ejemplo:

83 Dada la función

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x+3} & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 2x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \dfrac{3}{x+7} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe alguna discontinuidad evitable? ¿Cómo se podría evitar?

3.3.2 Derivada de una función

3.3.2.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este curso, se introduce el concepto de derivadas laterales. Este tipo de actividad es de utilizad para afianzar la definición y superar las dificultades que pueda originar la aplicación práctica de esta definición (4)

Ejemplo:

26 Utilizando la definición, calcula las derivadas laterales de estas funciones en $x = 2$.

a) $f(x) = |2 - x|$ b) $g(x) = |x^2 - 4|$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad ya ha sido propuesta en el curso anterior y tiene por objetivo que el alumno sea capaz de por sí mismo, llevar a cabo un estudio para determinar la continuidad y derivabilidad de la función (5)

Ejemplo:

31 Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ -2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad ya ha sido propuesta en el curso anterior y tiene por objetivo que el alumno sepa utilizar la definición de función derivada para su cálculo (5).

Ejemplo:

55 A partir de la definición, calcula la función derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ c) $h(x) = \operatorname{sen} x$

b) $g(x) = \sqrt{x}$ d) $v(x) = \cos x$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad tiene por objetivo que el alumno estudie la derivabilidad de una función que depende de uno o varios parámetros (8). En algunos de estos ejercicios, se proponen dos apartados como ayuda. En el primero se pide los valores de los parámetros para los cuales la función es continua y en el segundo, para esos valores, la derivabilidad. Este mismo tipo de actividad se propone también pero en vez de determinar el valor del o de los parámetros para que sea derivable en todo el dominio, para que lo sea en un punto concreto establecido por el enunciado (7)

Ejemplo:

48 Determina los valores de a y b para que la función sea derivable en todos los puntos.

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{a}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3.3.2.2 Otras actividades reseñables

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Se trata de una actividad en la que el objetivo es que el estudiante compare un determinado resultado con la teoría del tema.

Ejemplo:

30 Demuestra que la siguiente función es continua en el punto $x = 1$, pero no es derivable en él.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) ¿Contradice este hecho alguno de los teoremas o propiedades estudiados en la unidad?

b) Pon un ejemplo de una función que sea derivable y discontinua en un punto.

3.3.3 Representación de Funciones

3.3.3.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividades, se pide a los estudiantes que hallen o bien las asíntotas o bien las ramas infinitas de la función y, en algunos casos como en el ejemplo, ambas junto con la posición relativa de su gráfica respecto de ellas (13).

Ejemplo:

58 Halla las asíntotas y las ramas infinitas de la siguiente función, y determina la posición relativa de su gráfica respecto de cada una de ellas.

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x-1}$$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, se pide a los alumnos que representen gráficamente una función, analizando previamente las características de la misma y que se entiende que el alumno debe saber cuales son. Hay actividades de este tipo con funciones polinómicas (3), racionales (4), radicales (3), exponenciales (3), logarítmicas (3), a trozos (3) y valor absoluto (2) y mezcla (2).

Ejemplo:

88 Dibuja la gráfica de estas funciones racionales, analizando previamente sus características.

a) $y = \frac{x-1}{x^2}$

c) $y = \frac{x^2}{x+1}$

b) $y = \frac{x-2}{x-3}$

d) $y = \frac{x}{x^2+1}$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: El objetivo de esta actividad es el mismo que la anterior, es decir, la representación gráfica de funciones. No obstante, en este tipo de actividad se guía a los estudiantes sobre las características que deben estudiar. Hay actividades de este tipo con funciones racionales (8), exponenciales (1), logarítmicas (1).

Ejemplo:

94 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Máximos y mínimos locales.

e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

(C. Valenciana. Septiembre 2008. Ejercicio A. Problema 2)

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, se pretende que el alumno comprenda principalmente los conceptos de dominio, continuidad y asíntotas porque sólo de esa manera puede visualizarlos y construir una gráfica que cumpla las especificaciones dadas por el enunciado (3).

Ejemplo:

120 La función $y = f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

- Su dominio es la recta real salvo los puntos -1 y 1.
- Es continua en todo su dominio y corta al eje X en el punto $(2, 0)$.
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, con $f(x) < 0$ si $x > 2$ y $f(x) > 0$ si $x < 2, x \neq 1, x \neq -1$.
- Tiene una asíntota vertical en $x = 1$, con $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.
- Tiene una asíntota vertical en $x = -1$, con $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$.
- Tiene un mínimo en $(4, -2)$ y en $(0, 3)$. No tiene máximos.

Representa gráficamente dicha función.

(C. Valenciana. Junio 2007. Ejercicio B. Problema 3)

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, se pide a los alumnos que representen gráficamente una función que constituye un modelo matemático concreto de una aplicación realista. Se pide además que respondan a una pregunta a partir de la gráfica (3).

Ejemplo:

115 En la construcción de un túnel, el porcentaje de roca fragmentada o de mala calidad viene dado por el siguiente modelo matemático:

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 4{,}5x^2 + 18x + 15 \qquad 0 \leq x \leq 7$$

$R(x)$ representa dicho porcentaje cuando la distancia a la boca del túnel es x, en kilómetros.

Si en algún tramo de la perforación el porcentaje supe el 40 %, se deberán reforzar las medidas de sostenimie y seguridad de la estructura. Dibuja la gráfica de la func ¿Será necesario reforzar las medidas mencionadas?

(Asturias. Junio 2008. Bloque 3)

3.3.4 <u>Probabilidad</u>

3.3.4.1 Actividades tipo

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Esta es la actividad tipo de este tema, no sólo en este curso, sino en cursos anteriores, en lo que a la Ley de los grandes números se refiere. Incluso aparece con un enunciado parecido, casi siempre, haciendo referencia a una moneda o a un dado.

Ejemplo:

13 Se ha lanzado una moneda al aire 75 veces y se han obtenido 23 caras. ¿Podríamos decir que la moneda está trucada?

3.3.4.2 Otras actividades reseñables

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: En esta actividad, se pretende que el alumno diseñe un experimento para determinar la probabilidad de un suceso utilizando la Ley de los grandes números.

Ejemplo:

14 Una máquina fabrica piezas para motores de coche. Explica cómo calcularías la probabilidad de que, escogida una de las piezas al azar, sea defectuosa.

3.4 Ejercicios, problemas y cuestiones tipo en C+1-C

El libro analizado es *Matemáticas II, 2 Bachillerato* de la editorial Santillana.

3.4.1 Límites y Continuidad

Este tema es básicamente el mismo tema que el de la opción de Ciencias Sociales pero se incluyen además límites de sucesiones, la definición teórica de límite finito de una función en el infinito y de límite de una función en un punto. Además, se incluyen en este tema los teoremas de Bolzano y Weierstrass.

3.4.1.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, se pide hallar el límite de una sucesión dado su término general (4)

Ejemplo:

39 Calcula los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^3+8n^2-n+8)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{2n^3+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2-3n-2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-8n+16}{35}$

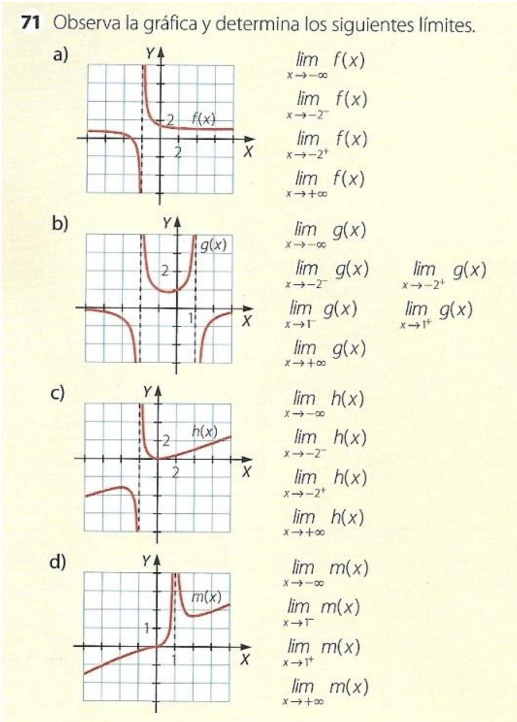
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n-2}{3n^3-7n+1}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-2n+3n^2-n^3}{2n^2-5n-4}$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Esta actividad va enfocada a que el alumno sepa calcular límites de una función a partir de su gráfica. El tema se centra principalmente en el cálculo analítico, pero a pesar de ello hay actividades como la del ejemplo para reforzar la parte gráfica (10).

Ejemplo:



71 Observa la gráfica y determina los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ $\lim_{x \to -2^-} g(x)$ $\lim_{x \to -2^+} g(x)$ $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ $\lim_{x \to 1^+} g(x)$ $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

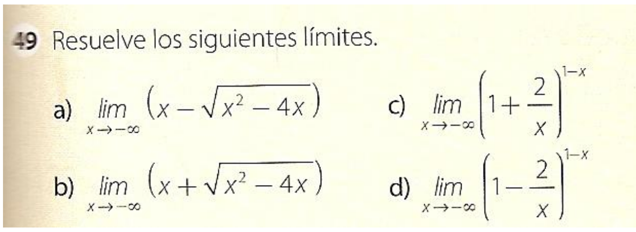
c) $\lim_{x \to -\infty} h(x)$ $\lim_{x \to -2^-} h(x)$ $\lim_{x \to -2^+} h(x)$ $\lim_{x \to +\infty} h(x)$

d) $\lim_{x \to -\infty} m(x)$ $\lim_{x \to 1^-} m(x)$ $\lim_{x \to 1^+} m(x)$ $\lim_{x \to +\infty} m(x)$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad va enfocada a la resolución analítica de límites con indeterminaciones. Generalmente, hay ejercicios enfocados únicamente a indeterminación $\frac{k}{0}$ o cálculo de límites laterales (5), con indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ (7), con indeterminación $\infty - \infty$ (9), con indeterminación $\frac{0}{0}$ (6), con indeterminación 1^{∞} (9) y mezcla de las anteriores (2). El tipo de ejercicio es el siguiente.

Ejemplo:



49 Resuelve los siguientes límites.

a) $\lim_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 4x}\right)$

b) $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 4x}\right)$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{1-x}$

d) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{1-x}$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En el libro, abundan los problemas descontextualizados en los que se pide o bien estudiar la continuidad de una función dada (10) o bien, determinar los valores de uno o varios parámetros para que la función dada sea continua en su dominio o en un intervalo concreto (9). También hay problemas descontextualizados en los que se pide o bien estudiar la continuidad de la función en un punto o puntos concretos (7), aunque estos son actividades que se acercan más a ejercicios que a problemas.

Ejemplo:

114 Se considera la función real de variable real definida por:
$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$. Estudiar su continuidad.
(Madrid. Septiembre 2002. Opción A. Ejercicio 2)

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Otra de las actividades tipo es dada una función, calcular límites en el infinito y en un punto de la función (13)

Ejemplo:

81 Se considera la función $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$. Calcula $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
(Baleares. Junio 2008. Opción A. Cuestión 3)

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, el alumno debe conocer la teoría asociada a los teoremas vistos para identificar cuál puede utilizar. Además, dentro de las condiciones de estos teoremas está implícito el estudio de la continuidad de la función, de manera que es un problema muy completo (14). Llama la atención el hecho de que ninguno de estos problemas esté contextualizado.

Ejemplo:

125 Demuestra que la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 3}{2x+1}$ se anula en el intervalo $[1, 3]$. Menciona los resultados teóricos en que te apoyas para hacer tus afirmaciones.

3.4.1.2 Otras actividades reseñables

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Se trata de una actividad que es interesante porque no hay otra igual y se pide utilizar la definición teórica de límite.

Ejemplo:

2 Aplica la definición de límite y demuestra que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n-2} = 1$$

Compruébalo para $\varepsilon = 0{,}0001$.

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Esta actividad es interesante porque hace al alumno calcular el término general de la sucesión, ver cómo evoluciona esta y le hace pensar en una cota superior que después relacionará con el valor del límite que obtenga.

Ejemplo:

42 Dejamos caer una pelota desde una altura de 4 metros y, tras cada rebote, la altura alcanzada se reduce a la mitad de la altura anterior. ¿Qué altura alcanzará la pelota después de cada uno de los cinco primeros rebotes? ¿Y tras el vigésimo rebote? ¿Y tras el rebote *n*-ésimo? Si a_n denota la altura alcanzada tras el *n*-ésimo rebote, obtén una cota superior y otra inferior de esta sucesión. Calcula $\lim_{n \to \infty} a_n$.

(Galicia. Septiembre 2004. Bloque 4. Pregunta 1)

3.4.2 Derivada de una Función

Este tema es muy similar al de la opción de Ciencias Sociales. La diferencia es que en este tema se ve la interpretación geométrica de la derivada y las técnicas de derivación mientras que en el de Ciencias Sociales no. Las actividades de las secciones son idénticas y las actividades finales son muy parecidas e incluso se repiten bastantes.

3.4.2.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, el objetivo es que el alumno se familiarice con la definición de derivada y sepa aplicarla para el cálculo de la derivada en un punto (6).

Ejemplo:

32 Utilizando la definición, calcula la derivada de las siguientes funciones en el punto $x = -1$.

a) $f(x) = 3x$ c) $i(x) = x^3$

b) $g(x) = x^2$ d) $j(x) = |x|$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este curso, se introduce el concepto de derivadas laterales. Este tipo de actividad es de utilizad para afianzar la definición y superar las dificultades que pueda originar la aplicación práctica de esta definición (4)

Ejemplo:

68 Utilizando la definición, calcula las derivadas laterales de la siguiente función en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad ya ha sido propuesta en el curso anterior y tiene por objetivo que el alumno sea capaz de, por sí mismo, llevar a cabo un estudio para determinar la continuidad y derivabilidad de la función (6)

Ejemplo:

73 Se considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x + 2 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ \dfrac{8}{x} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

(La Rioja. Junio 2004. Propuesta A. Ejercicio 5)

Actividad tipo: □ Ejercicio □ Problema ■ Cuestión □ Situación.

Descripción: Con este tipo de actividad se pretende que el alumno calcule la derivada n-ésima de una función polinómica y relacione el número de derivadas no nulas con el grado mayor del polinomio. Además, se puede emplear para que identifique que las derivadas aunque sean nulas, existen. Esta es una actividad que aparece repetidas veces aunque sólo en la del ejemplo se especifica que el cálculo de derivadas se haga a través de la definición.

Ejemplo:

14 Utiliza la definición para calcular la función derivada de la función $f(x) = x^3 + x^2$. Calcula, después, las derivadas sucesivas.
¿Existen todas hasta la derivada *n*-ésima?

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad ya ha sido propuesta en el curso anterior y tiene por objetivo que el alumno se familiarice con la definición de función derivada para su cálculo (5).

Ejemplo:

94 Utilizando la definición, calcula la función derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 123$
b) $f(x) = 3x^2$
c) $f(x) = x^3$
d) $f(x) = ax$

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Este tipo de actividad tiene por objetivo que el alumno estudie la derivabilidad de una función que depende de uno o varios parámetros (8). En algunos de estos ejercicios, se proponen dos apartados como ayuda. En el primero se pide los valores de los parámetros para los cuales la función es continua y en el segundo, para esos valores, la derivabilidad. Este mismo tipo de actividad se propone también pero en vez de determinar el valor del o de los parámetros para que sea derivable en todo el dominio, para que lo sea en un punto concreto establecido por el enunciado (5)

Ejemplo:

87 Considera la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determina los valores de *a* y *b* para que sea derivable en todos los puntos.

3.4.3 Aplicaciones de las Derivadas

3.4.3.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Con este tipo de actividad, se pretende que el alumno maneje la regla de L'Hôpital para la resolución de límites con indeterminaciones (23).

Ejemplo:

118 Calcula los límites de estas funciones cuando x tiende a 0.

a) $f(x) = x \ cotg \ x$

b) $g(x) = \frac{1}{x} - cotg \ x$

c) $h(x) = (e^x - x)^{\frac{1}{x}}$

3.4.4 Representación de Funciones

Este tema es muy similar al correspondiente en la opción de Ciencias Sociales. La diferencia radica en las actividades finales principalmente, ya que los contenidos son los mismos.

3.4.4.1 Actividades tipo

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: Como en el tema de la opción de Ciencias Sociales, una de las actividades tipo es el cálculo de asíntotas (13).

Ejemplo:

51 Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

(Castilla y León. Junio 2008. Prueba B. Cuestión 1)

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tipo de actividad, se pide a los alumnos que representen gráficamente una función, analizando previamente sus características. Hay actividades de este tipo con funciones polinómicas (3), racionales (4), radicales (3), exponenciales (3), logarítmicas (3), a trozos (3) y mezcla (4).

Ejemplo:

108 Estudia y representa estas funciones.

a) $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

b) $y = e^{(x^2 + 17x^4)}$

c) $y = x + \dfrac{1}{x}$

d) $y = \ln(16 - x^2 - x^4)$

Actividad tipo: ■ Ejercicio □ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: El objetivo de esta actividad es el mismo que la anterior, es decir, la representación gráfica de funciones. No obstante, en este tipo de actividad se guía a los estudiantes sobre las características que deben analizar. Hay actividades de este tipo con funciones racionales (4), exponenciales (4), logarítmicas (2), a trozos (1), etc.

Ejemplo:

98 Sea $f(x) = 2 - x + \ln x$, con $x \in (0, +\infty)$. Se pide:

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, los intervalos de concavidad y convexidad y las asíntotas de f. Esbozar la gráfica de f.

(Castilla y León. Septiembre 2008. Prueba B. Problema 2)

3.4.4.2 Otras actividades reseñables

Actividad tipo: □ Ejercicio ■ Problema □ Cuestión □ Situación.

Descripción: En este tema, se utilizan actividades tipo de otros temas (estudio de continuidad y derivabilidad) de manera previa al problema tipo de este tema que es la representación de funciones. Es interesante para contrastar, por ejemplo, el estudio teórico que se realiza sobre la continuidad, por ejemplo, con la gráfica de la función. Sirve también como técnica de comprobación.

Ejemplo:

103 Estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ -3 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 2$.
Representa gráficamente dicha función.
(Castilla-La Mancha. Junio 2005. Bloque 1. Pregunta A)

Capítulo 4.
Resultados

En este capítulo, se exponen los resultados de la comparación de los contenidos mínimos y criterios de evaluación seleccionados del currículo vigente para E.S.O. y Bachillerato por su relación con los límites (Capítulo 1 y Capítulo 2) con los temas de correspondientes en los libros de texto (C-2, C-1, C y C+1) analizados en el Capítulo 3.

En primer lugar, se analizarán las presencias y ausencias de los límites en el currículo y en los libros de texto.

En segundo lugar, se determinará el grado de adecuación y coherencia de los libros de texto en relación con el currículo en lo relativo al estudio de límites.

4.1 Ausencias y presencias en el currículo y en los libros de texto.

La enseñanza y el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo es un proceso complejo. El concepto de límite es fundamental pero a la vez supone uno de los mayores retos para los estudiantes. Principalmente esta es la razón por la que el este concepto no aparece como contenido mínimo en el currículo oficial hasta el primer curso de Bachillerato.

Así pues, durante la educación primaria no se hace ningún tipo de aproximación ni referencia al concepto de límite y aparece por primera vez, de forma indirecta, en primer curso de educación secundaria con el cálculo de las fracciones generatrices pero, especialmente, con la ley de los grandes números.

En segundo curso el currículo únicamente establece como exigencia mínima el conocimiento y cálculo de las fracciones generatrices, descriptor que reaparece en tercer curso junto con la ley de los grandes números. Ahora bien, el tratamiento que se le da a estos dos descriptores en el libro de texto analizado de 3º E.S.O. es superficial. En lo relativo a la fracción generatriz, el libro únicamente tiene por objetivo recordar al alumno un método para su cálculo, ya explicado en cursos anteriores. En cuanto a la ley de los grandes números, el libro de texto ya introduce la palabra tendencia y el alumno puede interpretar el comportamiento de un determinado fenómeno que tiende a estabilizarse, pero donde comienza a intuir el concepto de límite de forma más contundente o clara es con la suma infinita de una progresión geométrica. El motivo es que aparece el concepto de infinito, se refuerza la idea de tendencia y aparece en el libro de texto la simbología correspondiente. El descriptor relativo a las propiedades de funciones y gráficas aparece por primera vez también en tercero aunque en este curso únicamente se analiza la continuidad de la gráfica de una función y la relación con el límite no se explicita en el libro de texto.

En cuarto curso hay una ausencia en el currículo de todos los descriptores relacionados con límites a excepción del relativo a funciones. En los libros de texto de las dos opciones de matemáticas de cuarto, aparece el concepto de tendencia de una función y se explica desde el punto de vista gráfico así como a través de la tabla de valores correspondiente. En estos libros aparece también el término “asíntota” (aunque no se menciona en el currículo) y se estudia la tendencia de la función por cada uno de los dos lados un punto $x=x_0$, es decir, no aparece el concepto de límite lateral pero sí se introduce su simbología e idea intuitiva.

El descriptor relativo a las funciones tiene continuidad en todo el bachillerato (aunque en la modalidad de ciencias se estudian más funciones elementales y con algo más de profundidad que en la opción de Ciencias Sociales). Además, también tienen continuidad en bachillerato los descriptores de tendencia y continuidad y asíntota.

No ocurre lo mismo con la suma infinita de una progresión geométrica, que tan sólo vuelve a aparecer en el currículo oficial de primero de bachillerato de la opción de Ciencias (si bien en el libro de texto no se incluye el tema, tal y cómo se explica en el apartado 4.2) ni con la ley de los grandes números, que únicamente reaparece en segundo de bachillerato de la opción de Ciencias Sociales. En cuanto a la derivada, cabe decir que aparece como contenido mínimo en el currículo de los dos cursos de bachillerato de la opción de Ciencias y en segundo curso de la opción de Ciencias Sociales. No obstante, y a pesar de no aparecer en el currículo de primer curso de Ciencias Sociales, el libro de texto analizado incluye un tema de introducción a las derivadas.

Finalmente, en lo relativo al propio descriptor del límite, se observa que desde que aparece en primero de bachillerato, este descriptor tiene continuidad en las dos opciones. En el libro de texto hay un tema dedicado íntegramente al estudio de límites y continuidad. Ahora bien, aunque haya un tema independiente, en otros temas del libro (derivadas, estudio gráfico de funciones, etc) se hace referencia a límites y se estudia de manera coherente, relacionando conceptos en todo momento, tal y como establece el currículo.

Como comentario final de este apartado, hay que señalar que en el currículo se establecen los contenidos mínimos que deben aparecer en el libro de texto ya que son los exigibles en cada curso. A excepción del descriptor de sucesiones en primero de bachillerato de Ciencias, los contenidos mínimos están recogidos en los libros de texto, los cuales además completan progresivamente estos mínimos con otros contenidos que además, suelen ser recordados y repasados en los años siguientes.

4.2 Coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

En este apartado se va a analizar la coherencia y correspondencia de los contenidos mínimos y criterios de evaluación expresados en el currículo oficial con los libros de texto estudiados.

Para ello, además de los análisis realizados en los capítulos 1, 2 y 3, se utilizará como referencia el texto de matemáticas *Cálculo de una Variable.* de J. Stewart. Este libro, de mayor nivel y contenidos matemáticos más avanzados que los libros de texto analizados, permite comprobar las diferencias existentes en lenguaje, recursos gráficos, actividades, ejemplos, estructura de la lección, etc con respecto a los libros de texto de secundaria.

Así pues, estos libros de texto realizan adaptaciones en todos estos aspectos función del nivel y exigencias del currículo para asegurar la comprensión del alumnado. Por ejemplo, se recortan contenidos y se estudian con menor profundidad. Por otro lado, en lo referente a la estructura, el tema en el libro de referencia comienza con una sección dedicada al cálculo de tangentes y velocidades y justifica dicha elección argumentando que el límite que se usa para hallarlas es la derivada, tema que considera central en el cálculo diferencial. Se observa por tanto que el tema comienza con una aplicación práctica de límite, que pretende motivar, justificar y evidenciar la importancia de su estudio, y a partir de ahí, continua la lección con la explicación del concepto. Esto contrasta con los temas de los libros de texto en los que por lo general, primero se explica el concepto de manera clara y sencilla y posteriormente se hacen ejemplos o se muestran aplicaciones. El motivo es que en el libro de referencia se dan por sabidos contenidos que en secundaria todavía no están afianzados. En relación al lenguaje y la manera de explicar, la diferencia también es clara. En los libros de texto se utilizan palabras más comunes y no tan formales y el lenguaje simbólico no es tana abundante, si bien conforme va aumentando el curso, la presencia de símbolos matemáticos es mayor. Finalmente, en lo relativo a los recursos gráficos y actividades, estas son más complejas y requieren un nivel cognitivo mayor para poder llevarlas a cabo. En los libros de texto por lo general las actividades son de aplicación de la teoría, la mayoría de veces en contextos intramatemáticos mientras que en el libro de referencia, las alusiones a problemas y aplicaciones reales son más abundantes.

Resulta por tanto evidente la coherencia de los libros de texto en relación al nivel de los contenidos de los alumnos en educación secundaria por las adaptaciones realizadas para la explicación de los conceptos matemáticos.

A continuación, se muestran los resultados de un análisis en detalle para comprobar la correspondencia de estos libros con los contenidos y criterios de evaluación del currículo. Para mayor claridad, el análisis se realiza por cursos.

4.2.1 Curso 3º E.S.O

Los descriptores señalados en tercero de la E.S.O. son fracción generatriz, suma infinita de una progresión geométrica, características y propiedades de funciones y gráficas y ley de los grandes números.

Respecto al primer descriptor, los contenidos mínimos del currículo aparecen explicados en el libro de texto ya que se encuentran las relaciones entre números decimales y fracciones (materializadas en el concepto de fracción generatriz) y también se indican los procedimientos para su cálculo. Además, respecto a este descriptor el libro propone dos actividades tipo, que son por un lado, hallar la fracción generatriz de un número decimal y, por otro lado, realizar una operación con números decimales que previamente hay que transformar en fracción. La adecuación al currículo es por tanto elevada, no obstante, hay una carencia importante. Así pues, en el currículo se establece como criterio de evaluación que el alumno sea capaz de resolver problemas de la vida diaria para los cuales tenga que comprender y aplicar las propiedades y operaciones de los números racionales y sin embargo, en todo el tema del libro de texto, únicamente hay tres problemas en los cuales se hace referencia a contextos que no sean puramente matemáticos, pero en ninguno se trabajan dichas operaciones y propiedades.

En lo que a la ley de los grandes números se refiere, la adecuación también es alta. Tal y como se especifica en los contenidos del currículo, en el libro se formulan y comprueban conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos y se muestra el cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación. Así pues, se explica la ley de los grandes números explicitando la relación de la frecuencia relativa con la probabilidad. Se utiliza para ello resultados de simulaciones de experimentos y precisamente la actividad tipo consiste en que el alumno analice unos resultados concretos de un experimento sencillo dados por el enunciado para, tal y como establece el criterio de evaluación correspondiente, realizar predicciones razonables e inducir la probabilidad.

En lo relativo al descriptor de la suma infinita de una progresión geométrica, cabe decir que en el currículo no se encuentra especificado expresamente pero sí aparece explicado en el libro de texto e incluso, se demuestra la fórmula. Como actividad tipo se propone por un lado, la aplicación directa de dicha fórmula dada una sucesión y, por otro lado, su aplicación en problemas en los cuales previamente hay que identificar la progresión interpretando el enunciado, lo que constituye una parte importante del criterio de evaluación asociado a este descriptor. Además, se propone como actividad tipo el cálculo de fracciones generatrices mediante el método que utiliza la suma infinita, de manera que se enlazan conceptos de temas diferentes.

Finalmente, en cuanto a las características y propiedades de funciones y gráficas, cabe decir que las actividades tipo proponen por un lado, el estudio gráfico de funciones tanto en problemas contextualizados como intramatemáticos, tal y como establece el currículo, de manera que la presencia en este tema de los contenidos y actividades adecuadas es la correcta.

4.2.2 <u>Curso 4º E.S.O.</u>

En 4º E.S.O., el descriptor común a las dos opciones es el de funciones (tipos de funciones y estudio de funciones y gráficas).

El currículo oficial de la opción B especifica el estudio de más tipos de funciones que en la opción A (concretamente, las funciones de proporcionalidad inversa y logarítmica no aparecen en los contenidos mínimos de la opción A). Este hecho se aprecia en el libro de texto, ya que mientras en la opción A sólo hay un tema para explicar las funciones algebraicas (lineal, a trozos, parabólica, proporcionalidad inversa) y exponenciales, en la opción B hay dos temas, uno para las funciones algebraicas (las mismas que en la opción A más las funciones radicales) y otro para las exponenciales (se incluyen también las funciones logarítmicas y las ecuaciones exponenciales y logarítmicas). En ambos casos se cubren los contenidos mínimos, y además se añaden otros tipos de funciones. Por otro lado, en ambas opciones, hay un tema dedicado exclusivamente al estudio gráfico de funciones con problemas contextualizados de manera que esta parte del currículo también queda cubierta.

Es llamativo que en ambas opciones, en los temas de números reales y probabilidad, los libros de texto incluyen, respectivamente, las fracciones generatrices y la ley de los grandes números, descriptores que no están presentes en el currículo oficial, lo que supone un suplemento en relación al currículo. Ahora bien, se podía haber aprovechado para enriquecer las actividades propuestas y sin embargo, durante los cuatro cursos, el tipo y nivel de las actividades es muy similar.

4.2.3 Curso 1º Bachillerato

Tanto en el libro de texto de Matemáticas I como en el de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I, hay bastante coherencia con los contenidos y criterios de evaluación del currículo oficial, si bien queda patente alguna carencia, tal y como se indica a continuación.

En lo que refiere a funciones, en ambos libros hay un tema donde se explican las características globales, si bien, en el libro de ciencias no hay ningún apartado específico en el que se expliquen las tendencias y asíntotas. No obstante, tampoco es una carencia importante, ya que sí se hace referencia en temas posteriores cuando se explican algunas funciones, como las racionales. Así pues, ambos libros cuentan con temas dónde se explican las principales funciones elementales especificadas en el currículo (tan sólo falta la función parte entera en el libro de ciencias sociales). Por otro lado, en ambos hay actividades para la interpretación y estudio de las características de las funciones tanto en problemas contextualizados e intramatemáticos de manera que el grado de adecuación del libro de texto en este sentido es alto.

En lo que a límites se refiere, el currículo no profundiza apenas y los requerimientos son muy escasos. Se pretende un acercamiento al concepto, contenido que queda más que cubierto en ambos libros, ya que se explica el concepto de límite de una función en un punto (aunque no se enseñe la definición), los límites laterales, se procede al cálculo de límites, resolución de indeterminaciones, etc. Además, se proponen actividades en las que el alumno debe interpretar gráficamente el límite de una función para la resolución de problemas. Otra de las pretensiones del currículo es utilizar el concepto de límite para analizar la continuidad de una función, lo cual es abordado también en ambos libros de manera específica.

Finalmente, cabe destacar que una carencia importante se da en el libro de bachillerato de ciencias, tal y como se ha comentado en el apartado 4.1, ya que en el currículo aparecen las sucesiones en el bloque de aritmética y álgebra y sin embargo en el libro de texto este descriptor está ausente. Es llamativo también que en ambos libros hay un tema dedicado a las derivadas, mientras que en el currículo de la opción de ciencias sociales este descriptor no aparece. Por otro lado, tal y como ocurría en 4º E.S.O., en ambos libros se vuelven a explicar las fracciones generatrices y la ley de los grandes números a pesar de que no aparezcan expresamente en el currículo y las actividades vuelven a ser muy similares.

4.2.4 Curso 2º Bachillerato

El grado de coherencia y adecuación de los libros de 2º de bachillerato con relación al currículo vigente es elevada.

En referencia al descriptor de límites y continuidad, en ambos libros se amplían los contenidos del año anterior (por ejemplo, en el de ciencias, aparece la definición de límite), cubriendo en cada caso los contenidos mínimos. El tipo de actividades propuestas son principalmente relativas al cálculo de límites y al estudio de la continuidad de una función en un punto e intervalo.

En lo relativo a derivada, se amplían nuevamente los contenidos del año anterior en ambos libros, donde se proponen actividades para el cálculo de la derivada en un punto y de la función derivada a través de la definición. Además, hay un tema dedicado en los dos libros a las aplicaciones de la derivada. En el de ciencias hay una relacionada con los límites, que es la regla de L'Hôpital (que no aparece en el currículo) y en el de sociales, la aplicación es la representación gráfica de funciones, que también se aborda en un tema independiente en el libro de ciencias.

Finalmente, destacar que en el currículo de ciencias sociales se hace mención específica a la ley de los grandes números, que ha ido apareciendo en los libros de todos los cursos desde 3º E.S.O, incluido el de 2º bachillerato de ciencias sociales.

Parte II: Análisis de un proceso de estudio sobre límites en 1ºbachillerato de ciencias sociales

En esta segunda parte del Trabajo Fin de Máster se propone un proceso de estudio sobre límites, que se ha llevado a la práctica en dos aulas de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales del Instituto Plaza de la Cruz durante el periodo del Prácticum II del Máster.

La exposición del proceso de estudio, se divide en los cuatro capítulos siguientes. En el quinto capítulo se analiza la unidad didáctica de límites del libro de texto de referencia utilizado para la impartición de las clases. En el sexto capítulo se estudian los errores y dificultades previsibles en el aprendizaje de dicha unidad didáctica. En el séptimo capítulo se describe el proceso de estudio en lo relativo a la distribución del tiempo de clase, las actividades y tarea realizada por los alumnos. Finalmente, en el octavo capítulo se expone la fase de experimentación, se analizan los resultados obtenidos a través de un cuestionario construido *ad hoc*, comparándolos con los comportamientos y errores esperados y proponiendo posibles soluciones.

Capítulo 5.
Límites en el libro de texto de referencia

En este capítulo se analiza el tema 10, *Límites de Funciones. Continuidad,* del libro de texto de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales utilizado como referencia para el desempeño de la actividad docente en el centro. Tal y como se ha mencionado previamente, se trata del libro *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales* de la editorial Editex (ver Anexo A.).

Este análisis se lleva a cabo siguiendo las directrices indicadas en el artículo *Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta* de Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R.

5.1 Objetos matemáticos involucrados

La resolución de los ejercicios de límites pone en funcionamiento diversos recursos relativos al lenguaje, situaciones, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos que los estudiantes deben ir dominando para ser capaces de desempeñar correctamente dicha resolución.

En la siguiente tabla se muestran los objetos matemáticos involucrados en el tema de límites del libro de referencia, que si bien se muestran de manera tabular, hay que tener en cuenta que dichos elementos están relacionados entre sí.

LENGUAJE
Verbal: Límite, tendencia, límite lateral, función, convergente/no convergente, infinito, unicidad, “la función/ la variable independiente tiende a/se aproxima a”, tiende por la derecha/izquierda, coincidentes, “la función tiene límite”, “los valores que toma la función cada vez se hacen más grandes/pequeños”, “la variable independiente crece indefinidamente”, “la función se estabiliza”, “la gráfica se dirige hacia (…), sin llegar a tocar”, asíntota, cálculo, indeterminación, expresión determinada, numerador, denominador, conjugado, entorno de, rectas, continuidad, continuidad lateral, “a medida que (…) va creciendo”, rama, horizontal, vertical, oblicua, “dibujar sin levantar el lápiz del papel”, está/no está definida, dominio, discontinuidad evitable/no evitable, etc.
Gráfico: Tablas de valores, gráficas de funciones (con o sin flechas que indican las tendencias correspondientes), recuadros con esbozos de gráficas para señalar las variantes con las que se puede presentar una asíntota, tablas con símbolos matemáticos y su significado, tablas con los resultados de límites sencillos, etc.

LENGUAJE

Simbólico:

$\rightarrow, lím, \pm, \neq, \notin, \in, \mathbb{R}, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \exists, \nexists, x \rightarrow 2, x \rightarrow 2^+, x \rightarrow 2^-, f(x) \rightarrow 4, x \rightarrow 2 \ \Rightarrow \ f(x) \rightarrow 4$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L\,,\ \lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = L\,,\ \lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = L,\ \lim_{x\to x_0} f(x) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = L \\ \lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = L \end{cases}$$

$e, \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \frac{k}{0}, \infty \cdot 0, 1^{\infty}, \infty - \infty, x = x_0, y = L, y = mx + b, Domf, (a, b), [a, b], etc$

SITUACIONES

- **Problemas descontextualizados o intramatemáticos**: cálculo de límites y/o ecuaciones de asíntotas (dada una función expresada analíticamente o dada su gráfica), estudio de la continuidad de una función en un punto o en un intervalo, clasificación de los puntos de discontinuidad, etc.

- **Problemas contextualizados:** son menos abundantes y son actividades en las que el alumno debe deducir a partir del enunciado que se le pregunta un límite concreto que debe hallar, comprender e interpretar para poder responder correctamente. Además, se suele pedir que el alumno interprete alguna tendencia o asíntota.

CONCEPTOS

- **Previos**: Función, tendencia, asíntota, continuidad (gráfica), expresiones conjugadas, nociones algebraicas (operaciones con funciones, factorización de polinomios…), etc.

- **Emergentes:** Límite lateral, límite de una función en un punto, límite de una función en el infinito, función convergente, indeterminación, continuidad (significado completo, no sólo desde el punto de vista gráfico), continuidad lateral, discontinuidad evitable/no evitable.

PROCEDIMIENTOS

- Descontextualización del enunciado del problema;

- Contextualización de enunciados descontextualizados.

- Determinación, para ciertos valores de la variable independiente, del límite de alguna función dada mediante su representación gráfica.

- Cálculo de límites sencillos.

- Utilización de las operaciones con límites para resolver ejercicios y problemas de límites.

- Identificación y resolución de indeterminaciones.

- Determinación las asíntotas de una función gráfica o analíticamente.

- Estudio de la continuidad/discontinuidad de una función. Clasificación de los puntos de discontinuidad.

PROPIEDADES
- Operaciones con límites de funciones: $Sea\ \ \lim_{x\to x_0} f(x) = L\ y\ \lim_{x\to x_0} g(x) = M$ ■ $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L \pm M$ ■ $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L \cdot M$ ■ $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M} \quad si que\ M \neq 0$ ■ $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[p]{L}$ ■ $\lim\limits_{x\to x_0} \left(f(x)\right)^p = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^p = L^p$ ■ $\lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \log_a L\ \ con\ L > 0$ ■ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \qquad si\ L \neq 0\ y\ M \neq 0$ - Comportamiento de una función polinómica en el infinito: $\lim\limits_{x\to\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = \lim\limits_{x\to\infty} a_n x^n$

ARGUMENTOS
- Principalmente el razonamiento es deductivo. Se explica el método de resolución de los ejercicios y posteriormente se aplica a ejemplos concretos y se extraen las conclusiones pertinentes. - Razonamiento inductivo a partir del ejemplo introductorio con el que se pretende dar una idea intuitiva de función convergente o de gráficas adjuntas que clarifican el discurso. - En una de las secciones finales del libro se explica el método del ensayo y error (fortuito y dirigido) y se proponen actividades de aplicación pero que no tienen nada que ver con el contenido de la unidad (límites y continuidad)

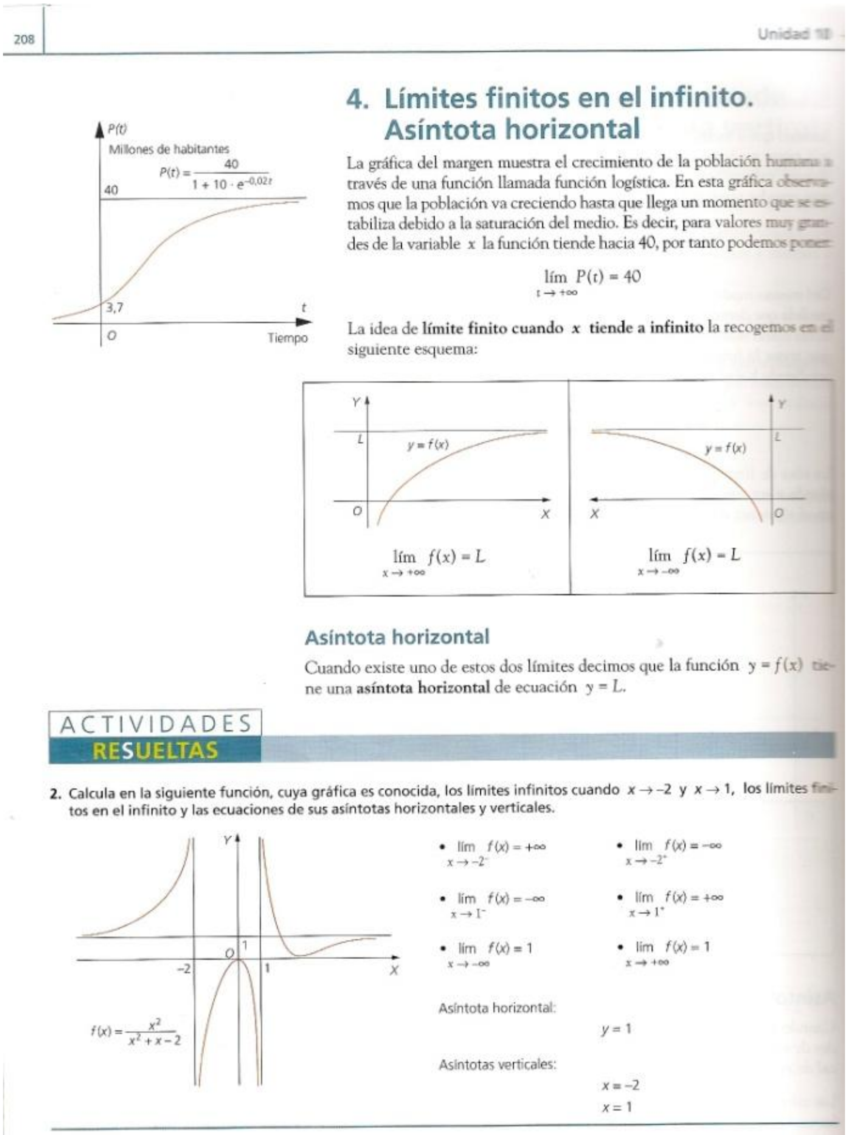
5.2 Análisis global de la unidad didáctica

La unidad didáctica que se va analizar es la especificada anteriormente de *Límites de funciones. Continuidad* del libro de texto de referencia.

El tema del libro de texto comienza con una portada que contiene un recuadro que recoge los contenidos que se van a desarrollar a lo largo del tema y que se corresponden con las secciones en las que se ha distribuido la unidad. En la página siguiente, se incluye una breve introducción al capítulo, en la que se pone de relieve la importancia de la noción de límite dentro del análisis matemático, como base para construir los conceptos de continuidad, derivación e integración, y se muestran contextos extra matemáticos donde se utiliza la palabra tendencia. Esta breve introducción cumple dos objetivos, el primero motivar al estudiante y hacerle comprender la importancia del tema que va a abordar y el segundo, familiarizarle con este concepto mediante contextos en los que le resulta más cercano. Finalmente, se incluye una cuestión inicial en la que se pide comentar las tendencias de cuatro funciones expresadas mediante su gráfica, con el fin de recordar conocimientos previos necesarios para comenzar el estudio de límites.

Tras esta introducción y entrada en materia, se suceden las 16 secciones en las que se divide el tema. Las 10 primeras secciones se titulan: (1) *Idea intuitiva de función convergente*, (2) *Límite de una función*, (3), *Límites infinitos cuando x tiende a un número finito. Asíntota vertical*, (4) *Límites finitos en el infinito. Asíntota horizontal*, (5) *Límites infinitos en el infinito*, (6) *Asíntotas de una función*, (7) *Operaciones con límites de funciones*, (8) *Cálculo de límites sencillos*, (9) *Funciones continuas* y (10) *Propiedades de las funciones continuas. Discontinuidad*.

Estas secciones explican la unidad, introduciendo los conceptos destacados en el apartado anterior y desarrollando los contenidos. La estructura de estas secciones es muy similar entre sí (ver Ilustración 1).


208 Unidad 10

4. Límites finitos en el infinito. Asíntota horizontal

La gráfica del margen muestra el crecimiento de la población humana a través de una función llamada función logística. En esta gráfica observamos que la población va creciendo hasta que llega un momento que se estabiliza debido a la saturación del medio. Es decir, para valores muy grandes de la variable x la función tiende hacia 40, por tanto podemos poner:

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = 40$$

La idea de **límite finito cuando x tiende a infinito** la recogemos en el siguiente esquema:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ $\qquad$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Asíntota horizontal

Cuando existe uno de estos dos límites decimos que la función $y = f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** de ecuación $y = L$.

ACTIVIDADES RESUELTAS

2. Calcula en la siguiente función, cuya gráfica es conocida, los límites infinitos cuando $x \to -2$ y $x \to 1$, los límites finitos en el infinito y las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

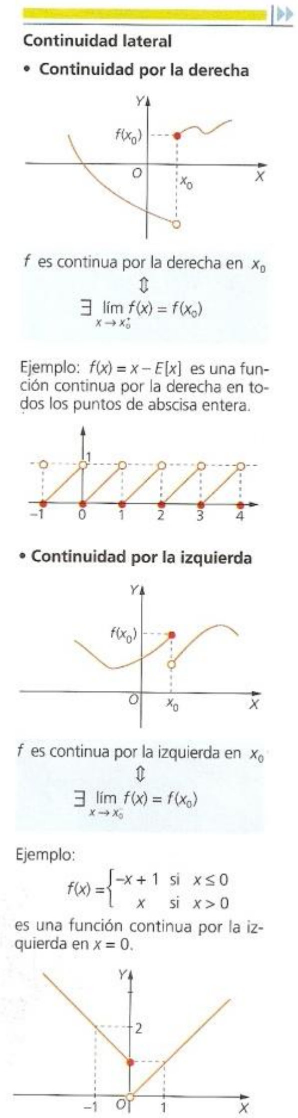
- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Asíntota horizontal: $y = 1$

Asíntotas verticales: $x = -2$ $\quad$ $x = 1$

Ilustración 1 Estructura general de la sección.

Así pues, todas comienzan con una explicación teórica del contenido propio de la sección, generalmente en base a un ejemplo sencillo. Para ello, en el libro se incluyen al margen gráficas que sirven de base para la explicación o de apoyo al discurso (como la gráfica de la Ilustración 1), explicaciones adicionales (Ilustración 2), contenidos útiles (Ilustración 3) y ejemplos adicionales (Ilustración 4).



Continuidad lateral

- **Continuidad por la derecha**

f es continua por la derecha en x_0

$\Updownarrow$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Ejemplo: $f(x) = x - E[x]$ es una función continua por la derecha en todos los puntos de abscisa entera.

- **Continuidad por la izquierda**

f es continua por la izquierda en x_0

$\Updownarrow$

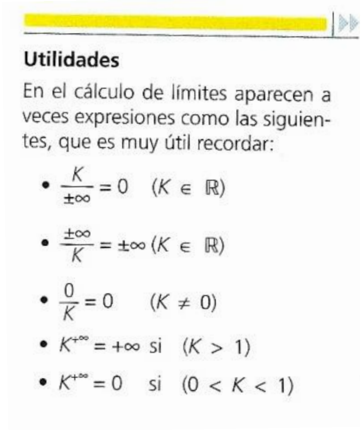
$\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es una función continua por la izquierda en $x = 0$.

Ilustración 2 Explicación adicional

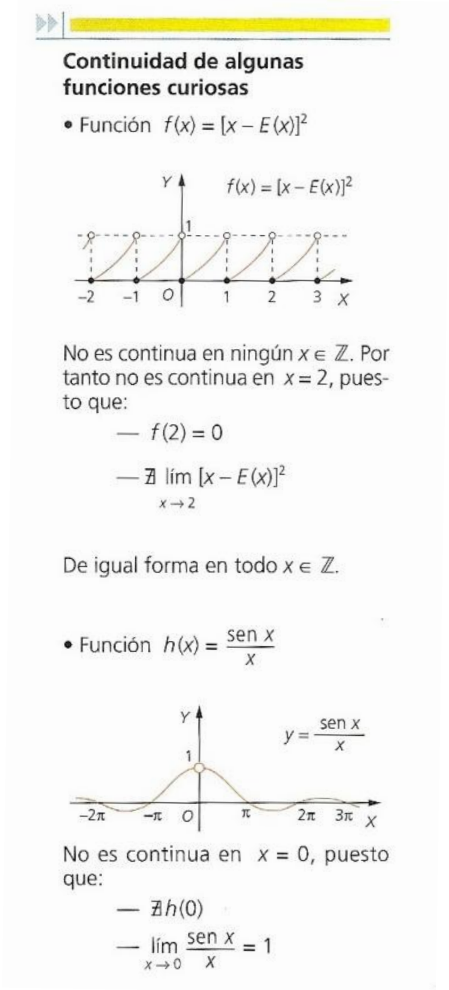


Utilidades

En el cálculo de límites aparecen a veces expresiones como las siguientes, que es muy útil recordar:

- $\frac{K}{\pm\infty} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$
- $\frac{\pm\infty}{K} = \pm\infty \; (K \in \mathbb{R})$
- $\frac{0}{K} = 0 \quad (K \neq 0)$
- $K^{+\infty} = +\infty$ si $(K > 1)$
- $K^{+\infty} = 0$ si $(0 < K < 1)$

Ilustración 3 Contenidos útiles



Continuidad de algunas funciones curiosas

- Función $f(x) = [x - E(x)]^2$

No es continua en ningún $x \in \mathbb{Z}$. Por tanto no es continua en $x = 2$, puesto que:

— $f(2) = 0$

— $\nexists \lim\limits_{x \to 2} [x - E(x)]^2$

De igual forma en todo $x \in \mathbb{Z}$.

- Función $h(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$

No es continua en $x = 0$, puesto que:

— $\nexists h(0)$

— $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

Ilustración 4 Ejemplo adicional

En una de las secciones se añade además una ilustración al margen con las arcadas de una catedral para intentar dar una visión práctica y realista (Ilustración 5) al mostrar una forma parabólica similar a la función del margen que se ha estudiado y en otra, un recuadro con una nota histórica sobre el símbolo de infinito.

Ilustración 5. Arcadas de catedral.

Debajo de la explicación teórica y notas al margen, en las secciones 2, 4, 5, 6 y 8, se incluye una actividad resuelta relacionada con el contenido visto previamente (Ilustración 1). En todos los casos, se trata de ejercicios de aplicación directa de la teoría. En el resto de las secciones no hay ningún tipo de actividad, ni siquiera resuelta, de hecho, es llamativo que en ninguna de las secciones se propongan actividades para que el estudiante realice durante el tiempo de clase o en casa. A pesar de que en las secciones finales se propongan ejercicios y algún problema, el hecho de no intercalar actividades de aplicación en el transcurso del tema es una carencia, ya que impide que el estudiante tenga opción de trabajar los contenidos de forma progresiva.

El resto de las secciones tienen una estructura diferente. En la sección siguiente, cuyo título es (11) *Resolución de problemas*, se presenta un problema contextualizado (“Los huevos de gallina y de pata”), que sirve como ejemplo de aplicación de la técnica de resolución de problemas que se explica a continuación y que en este caso es la de ensayo y error. Este problema se resuelve indicando los pasos a seguir: *familiarización con el problema*, *búsqueda de estrategias*, *llevar adelante la estrategia* y *revisar el proceso y sacar consecuencias de él*. Finalmente, en esta sección se añaden cuatro actividades de aplicación, similares al ejemplo inicial. La voluntad de mostrar técnicas de resolución aplicables por los estudiantes es altamente valorable, no obstante, esta sección presenta una carencia importante y es que ninguna de las actividades tiene relación con los contenidos dados en la unidad. Así pues, esta sección supone un inciso en el tema para explicar una técnica que, con los ejemplos escogidos, se desliga totalmente y rompe el hilo de la unidad. Esta ruptura podría ser malinterpretada por los estudiantes, llegando a confundirles. Para un óptimo aprovechamiento de la técnica, sería recomendable incluirla al final de un tema que se prestara más a su utilización.

La sección siguiente titulada (12) *Nuevas tecnologías*, se propone el cálculo de tres límites con el programa Derive y se muestra el procedimiento a seguir, ilustrando alguno de los pasos con capturas de pantalla. También se incita a practicar con el programa resolviendo algunas de las actividades propuestas en otras secciones.

A continuación, en la sección (13) *En resumen*, se muestra un esquema para repasar el tema y en la sección (14) *Amplía con…*, se recomienda el libro *El teorema del loro* (editorial Anagrama) de Denis Guedj, que trata de un enigma matemático aunque en este caso tampoco se manifiesta la relación de este libro con el tema.

En la sección siguiente (15) *Actividades finales*, se incluyen un total de 22 ejercicios (principalmente) y problemas, con el objetivo de asegurar la comprensión, afianzar, repasar y aplicar los contenidos.

Por último, el tema incluye la sección (16) *Autoevaluación*, en la que se proponen ejercicios para que los estudiantes realicen y sean conscientes de su nivel de conocimientos sobre el tema.

Capítulo 6.

Dificultades y errores previsibles en el aprendizaje de la unidad didáctica.

En este capítulo se describen las dificultades y errores previsibles en el proceso de estudio de límites por estudiantes de primero de bachillerato de Ciencias Sociales. Se especificarán igualmente los motivos de estas dificultades y los posibles orígenes de los errores.

6.1 Dificultades

Las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes son considerables y de diversa índole:

- Entender el concepto de límite, por su carácter abstracto, así como comprender e identificar los límites laterales.
- Interpretar la noción de límite y ver su utilidad y aplicación práctica.
- Límites infinitos y en el infinito. Dificultad en diferenciarlos, calcularlos e interpretarlos.
- Identificar expresiones determinadas y calcular su valor. Nunca hasta el momento han tenido que enfrentarse a expresiones con infinito o cero y les crea inseguridad.
- Comprender el concepto de indeterminación, identificarlas y resolverlas. Se prevé que tengan dificultades primero en determinar de qué tipo de indeterminación se trata, posteriormente en seleccionar la técnica para su resolución (teoría) y finalmente, aplicarla correctamente.
- Entender y utilizar las operaciones con límites. Diferenciar qué simplificaciones o equivalencias se pueden hacer y cuáles no a la hora de calcular un límite analíticamente.
- En el cálculo del límite de una función en un punto, identificar si existen puntos conflictivos en los que hay que realizar límites laterales (por ejemplo, extremos del dominio de una función, puntos que definen los intervalos de una función a trozos, etc)
- Interpretar y utilizar la notación. El estudio de límites conlleva una simbología y notación específica a la que no están todavía acostumbrados.
- Relacionar el cálculo analítico de límites con el cálculo a partir de la gráfica de la función.
- Hacer uso correcto de los conocimientos matemáticos previos en lo referente a nociones algebraicas y operatoria (operaciones con funciones, raíces, potencias, factorización de polinomios…).
- Hacer uso del conocimiento sobre las traslaciones de funciones sencillas para la representación gráfica de las mismas y el cálculo de límites mediante métodos gráficos.

6.2 Errores y su posible origen

En esta sección se van a clasificar los errores previsibles en dos grandes grupos: aquellos provenientes del cálculo de límites mediante la gráfica de una función y aquellos que surgen cuando se calcula el límite mediante la expresión analítica de la función.

6.2.1 Errores en el cálculo de límites a través de la gráfica de la función:

- Confundir el eje x con el eje y. Ya en el tema anterior de interpretación gráfica de funciones se observó que cometían este error. Una manifestación de ello era que cambiaban la coordenada x por la y, por ejemplo, a la hora de expresar un punto (de hecho, solían cometer errores cuando se les pedía identificar los puntos de corte de la gráfica con los ejes) o situarlo en la gráfica. Otra manifestación también en este tema de estudio gráfico de funciones, se daba por ejemplo a la hora de determinar si una función estaba acotada o como era su crecimiento ya que no distinguían si tenían que fijarse en el eje x o y. Por todo ello, se prevé por un lado que se equivoquen al diferenciar qué es lo que tienen que mirar en el eje x (en el caso de límites, punto en el que se pide su cálculo) y en el eje y (valor al que se acerca la función cuando la x tiende al punto considerado) y por otro lado, que den un valor equivocado al expresar el límite por confundir coordenadas.
- No estudiar límites laterales. Puede haber dos motivos, o bien por despiste o bien porque inconscientemente hallan el valor de un límite lateral y piensan que este es el límite, a pesar de que el otro límite lateral no exista o que los límites laterales sean diferentes. Denota un fallo en la comprensión del concepto de límite.
- Equivocarse con derecha e izquierda en el estudio de límites laterales. Principalmente debido a despistes o a no dominar la notación.
- Determinar incorrectamente la imagen de la función en un punto. Esto se debe principalmente a que no acaban de entender este concepto.

6.2.2 Errores en el cálculo de límites a través de la expresión analítica de la función:

- Obtener una expresión al sustituir en la función y equivocarse al clasificarla: como indeterminación, cuando es una expresión determinada y a la inversa. Esto puede suceder porque no tienen claro cuáles son las expresiones indeterminadas, bien porque no las hayan estudiado o bien porque no las hayan entendido y no diferencien la naturaleza de unas y otras.
- Calcular erróneamente el valor de algunas expresiones determinadas, especialmente: $si\ k \in (0,1) \Rightarrow k^{+\infty} = 0\ y\ \log_a +\infty = -\infty$. Están familiarizados a estudiar las funciones exponenciales y logarítmicas de base mayor que 1 y por lo tanto, cuando se les presentan estas expresiones, suelen contestar con independencia de que la base en este caso es menor que 1.

- Seleccionar el método incorrecto para resolver una indeterminación. Este error puede ocurrir por falta de estudio o comprensión.
- Aplicación incorrecta del método para resolver la indeterminación $\frac{k}{0}$. En estos casos hay que realizar límites laterales y un error previsible es que los realicen y se les olvide concluir cuál es el límite.
- Aplicación incorrecta del método de dividir numerador y denominador por el término de mayor grado para resolver la indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Es previsible errores como elegir mal el grado del término por el que hay que dividir (especialmente cuando hay funciones con raíces) o equivocarse al introducir dividiendo el término en una raíz.
- Aplicación incorrecta del método de multiplicar numerador y denominador por el conjugado para resolver una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ o $\infty - \infty$ con funciones radicales. Se prevé que los estudiantes fallen porque se les olvide multiplicar o bien el numerador o bien el denominador por el conjugado o al operar con el conjugado cometan este tipo de error: $(x-a)(x+a) = x^2 + a^2$. Errores con las identidades notables son constantes a lo largo del curso, de manera que no es de extrañar que sigan sucediéndose durante el transcurso del tema de límites. Un motivo es que no las han interiorizado correctamente, las confunden o no saben relacionar estas expresiones algebraicas con las expresiones numéricas correspondientes.
- Errores de notación. La manera de expresar los límites durante el proceso de cálculo es muy concreta y es posible que los estudiantes tarden en acostumbrarse. De hecho, es muy posible que se olviden durante el proceso o en algún paso intermedio de poner “ $\lim_{x \to x_0}$ ”, que lo pongan cuando ya no es necesario o que no indiquen si la expresión obtenida es una indeterminación.

Capítulo 7.
El proceso de estudio.

En este capítulo se va a describir el proceso de estudio de límites, en tanto a la distribución del tiempo de clase, las actividades adicionales planificadas y la tarea prevista a realizar por los alumnos de manera autónoma.

7.1 Distribución del tiempo de la clase

En la programación didáctica anual, está previsto un total de 18 sesiones para la unidad didáctica de límites y continuidad. Durante el periodo del Prácticum II únicamente se pudieron impartir 9 sesiones (con responsabilidad plena de la alumna), en las que el proceso de estudio se centró en los siguientes contenidos de la unidad: concepto de límite y límites laterales de una función en un punto, límites de una función en el infinito, función convergente, cálculo de límites de manera gráfica y analítica y resolución de indeterminaciones $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty)$. En las siguientes 8 sesiones, impartidas por el tutor del centro, se explicó la resolución de la indeterminación 1^{∞}, el concepto de continuidad y asíntotas y se dedicó una de estas sesiones a la realización del examen del tema.

Puesto que el proceso de estudio que se va a analizar es el relativo a las 9 primeras sesiones, estas son las que se van a detallar a continuación. No obstante, y dado que se va a tener en cuenta el examen final del tema para contrastar la evolución de los estudiantes y de sus errores, se añade una pequeña descripción con el trabajo realizado en las sesiones impartidas por el tutor, de manera que se pueda tener una visión global de las clases impartidas en la unidad didáctica.

En estas primeras nueve sesiones, tal y como se ha comentado, la responsabilidad recae sobre la alumna. En todas ellas se intenta realizar un tipo de docencia dialógica aunque se combina con explicaciones magistrales puntuales. Las sesiones duran 55 minutos y la descripción detallada de las mismas se muestra a continuación.

Sesión 1

Aspecto	Descripción	Tiempo
Evaluación inicial	Mientras se prepara el proyector, se reparte a los alumnos un ejercicio para que dada una gráfica, determinen algunos límites de funciones para evaluar sus conocimientos previos.	4’
Iniciación a Geogebra	Comienza la clase con una breve introducción al programa, se enseñan los comandos básicos y se utiliza para ver de forma rápida algunas de las funciones elementales estudiadas y las transformaciones que se les pueden realizar y que han visto en el tema anterior.	8’
Límites de sucesiones	Se introduce la clase de límites haciendo referencia al límite de sucesiones ampliamente conocidas. Para ello, se hace un recuerdo de qué es una sucesión, se construye una tabla de valores con el objetivo de hallar los primeros términos y se representan dichos valores. Primero se hace una pequeña explicación en la pizarra y después se utiliza Geogebra (ver Anexo B.). Una vez vistas sucesiones sencillas, se aprovecha Geogebra para representar la sucesión que tiende al número e y se introduce dicho número.	15’
Límites Laterales	Se utiliza Geogebra para representar la primera función de los apuntes. Se muestran los límites laterales (primero uno y después el otro) con ayuda del deslizador de la aplicación y se relaciona con los conocimientos previos que tenían de tendencia.	3’
Límite y función convergente	Se explica la noción de límite y de función convergente. Se utilizan diferentes funciones para los calcula el límite en diferentes puntos y se analiza su convergencia.	20’
Límites en el infinito y límites infinitos	Se muestran los límites en el infinito y límites finitos utilizando Geogebra con algunas de las funciones de los apuntes.	5’

Sesión 2

Aspecto	Descripción	Tiempo
Corrección evaluación inicial	Se aprovecha el inicio de la clase para corregir la evaluación inicial (ver Apartado 8.2) que realizaron el día anterior, comentar fallos comunes y resolver dudas.	10’
Repaso	Se repasa brevemente los conceptos vistos en la clase anterior.	2’
Corrección tarea	Una vez aclaradas las dudas, se les deja revisar la ficha de límites que han realizado para tarea y se corrige de manera grupal.	6’
Cálculo de límites	Se explica la regla I (ver apuntes en Anexo C.) y se hacen los ejercicios 1 a 6 en la pizarra. Se deja a los alumnos tiempo para que finalicen los ejercicios (ejercicios 7 -11). Los límites que aparecen de funciones son comprobados además gráficamente, mediante la representación gráfica de la función correspondiente	25’
Operaciones con límites	Se explican las operaciones con límites y se hacen los ejercicios 12, 13 y 16 en la pizarra.	7’

Sesión 3

Aspecto	Descripción	Tiempo
Corrección tarea	Comienza la clase corrigiendo los ejercicios de tarea propuestos. Se utilizan estos ejercicios para incidir en la representación gráfica de funciones como método de comprobación y cálculo de límites cuando la gráfica de la función es conocida.	8’
Excepciones a la regla I	Se estudian los ejercicios 19 a 21 en la pizarra y se muestra la relación de los resultados obtenidos con la gráfica. Se realizan nuevamente en la pizarra los ejercicios 22 a 24 y se deja el ejercicio 25 para que lo realicen los alumnos de forma autónoma. Posteriormente, se van realizando los ejercicios 26 a 32 de manera dialógica, intentando asegurar la participación del grupo y se van extrayendo conclusiones.	40’
Expresiones determinadas	Se explican las expresiones determinadas de los apuntes y se van poniendo ejemplos para clarificar conceptos.	7’

Sesión 4

Aspecto	Descripción	Tiempo
Corrección tarea	Comienza la clase corrigiendo los ejercicios de tarea propuestos y solucionando dudas. Se relaciona siempre que es posible con la gráfica de la función correspondiente	12’
Regla II	Se explica la regla II. Se hacen los ejercicios 33 y 34 en la pizarra y se deja tiempo a los alumnos para que hagan ellos el 35 y 36.	8’
Indeterminaciones.	Se explica qué es una indeterminación mediante ejemplos concretos. Se indica cómo se resuelve la indeterminación $\frac{k}{0}$ y se resuelve en la pizarra el ejercicio 37. Se explica la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ y se resuelven los ejemplos y los ejercicios 39 y 40.	35’

Sesión 5

Aspecto	Descripción	Tiempo
Corrección tarea	Comienza la clase corrigiendo los ejercicios de tarea propuestos y solucionando dudas.	10’
Indeterminaciones.	Se continúa resolviendo ejercicios con indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ cuando las funciones tienen radicales. Se resuelven en la pizarra los ejercicios 43 y 44. Se explica la indeterminación $\frac{0}{0}$, se hacen los ejemplos y los ejercicios 46-47. Se deja tiempo en clase para hacer ejercicio 48-49.	45’

Sesión 6

Aspecto	Descripción	Tiempo
Corrección tarea	Comienza la clase corrigiendo los ejercicios de tarea propuestos y solucionando dudas.	15’
Indeterminaciones.	Se explica la indeterminación $0 \cdot \infty$ y se hace en la pizarra el ejercicio 50. Se deja tiempo para hacer el ejercicio 51. A continuación se explica la indeterminación $\infty - \infty$ y se hacen los ejercicios 52 y 53. Se realiza colectivamente el ejercicio 54 y se deja tiempo para que hagan el ejercicio 55.	35’
Ejercicios ficha	Se hacen los ejercicios 10 y 13 de la ficha de límites (II)	5’

Sesión 7

Aspecto	Descripción	Tiempo
Corrección tarea y dudas	Se dedica la clase a resolver las dudas para la prueba de examen que se realiza al día siguiente y para corregir los ejercicios de la ficha que faltaban.	15’

Sesión 8

Aspecto	Descripción	Tiempo
Prueba de examen	Los alumnos realizan la prueba de examen que se encuentra en el Apartado 8.1.	55’

Sesión 9

Aspecto	Descripción	Tiempo
Encuestas	Se reparte a los alumnos unas encuestas para valorar la actuación docente, la metodología y sus técnicas de estudio (ver Anexo D.)	5’
Corrección de la prueba de examen	Se resuelven los ejercicios de la prueba de examen y se atienden dudas, de forma colectiva e individual.	50’

El resumen de las sesiones impartidas por el tutor del centro se expone a continuación:

Sesión	Descripción
10	Tutoría y repaso y dudas de lo visto hasta ahora.
11	Explicación de la indeterminación $\mathbf{1}^{\infty}$
12	Corrección y resolución de dudas de ejercicios con indeterminación $\mathbf{1}^{\infty}$
13	Explicación del concepto de continuidad. Tipos de discontinuidad
14	Continuación con la explicación de continuidad y ejercicios de aplicación.
15	Explicación de las asíntotas y ejercicios de aplicación.
16	Dudas ficha III y repaso del examen
17	Examen

7.2 Actividades adicionales planificadas

Para el desarrollo de las clases, se planificaron diversas actividades (ejercicios de repaso y refuerzo que vienen recogidos en dos fichas), se redactaron unos apuntes para el seguimiento de las clases y se realizaron construcciones dinámicas con GeoGebra.

Apuntes y fichas de ejercicios

Para el estudio del tema de límites, se redactaron los apuntes basados en el tema *Límites de funciones. Continuidad* del libro de texto de referencia y que se encuentran en el Anexo C. Estos apuntes recogen los aspectos fundamentales de esta unidad didáctica de la manera más adecuada en relación a cómo se pensó impartir la materia.

Así pues, constan de un primer apartado en el que se hace referencia a los límites de sucesiones, que no son estudiados en el libro de texto. Se consideró que sería más intuitivo para el alumnado comenzar el estudio con límites de sucesiones que conocieran y aprovechar la ocasión para añadir la sucesión que tiende al número e, dado que es un número irracional que aún no conocen y que utilizarán más adelante.

La sección siguiente de los apuntes se centra en el concepto de límite de una función. Se explican en primer lugar los límites laterales, se prosigue con la definición de límite y finalmente, se añade la definición de función convergente y los límites de una función en el infinito. Para la explicación de todos estos conceptos, se añaden previamente las gráficas de cuatro funciones para trabajar en clase y que constituyen la base para, interviniendo dialógicamente, explicar de estos contenidos.

En la siguiente sección, dedicada al cálculo de límites, se aportan reglas para su resolución, con ejemplos (algunos completos y otros a completar por el alumno durante el transcurso de la clase) y ejercicios, que o bien se realizan durante la clase o bien se proponen de tarea.

La siguiente sección es un *alfabeto* de gráficas de funciones a conocer y utilizar por el alumnado. Así pues, se pretende dotar al alumnado de un método gráfico de cálculo de límites sencillos y de comprobación de los resultados obtenidos analíticamente.

Finalmente, se añaden dos fichas con ejercicios de repaso y de refuerzo.

GeoGebra

El concepto de límite es uno de los pilares del análisis matemático, que suele ser difícil de entender y asimilar para los estudiantes, principalmente por su naturaleza abstracta. Con el objetivo de clarificar este concepto, se realizaron diversas construcciones dinámicas con GeoGebra. Estas construcciones permiten analizar y visualizar el comportamiento de la función en las proximidades de un punto de una manera clara y precisa. El movimiento, dinamismo, la posibilidad de representar una variedad de funciones en poco tiempo y los recursos visuales (colores, tipos de líneas, casillas de control para mostrar/ocultar objetos, etc) son tan sólo varias posibilidades que ofrece el programa y que ayuda a la correcta interpretación y comprensión del concepto de límite.

Algunas de las construcciones que se realizaron para mostrar el concepto de límite de una sucesión y de una función en un punto y en el infinito, se encuentran en el Anexo B.

Trabajo colaborativo

Una de las actividades que se programaron pero que finalmente no hubo tiempo a realizar en el aula, se muestra en el Anexo E. Se trata de una colección de ejercicios que los alumnos debían realizar en grupo, distribuyéndoselos de la manera que creyeran conveniente pero asegurándose de que todos sabían hacer cada ejercicio puesto que en la siguiente clase serían evaluados y la nota de cada uno de ellos sería la menor nota de los integrantes del grupo.

7.3 La tarea: actividad autónoma de los alumnos prevista

Sesión 1

Tarea	Descripción	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje
Ficha de límites (I) de los apuntes	Se trata de una ficha de gráficas donde se pregunta a los alumnos determinados límites.	10’	Repaso y aplicación

Sesión 2

Tarea	Descripción	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje
Ejercicios 14, 15, 17 y 18 de los apuntes	Se trata de ejercicios de cálculo de límites sencillos, donde se manifiestan algunas de las operaciones con límites.	10’	Refuerzo y aplicación

Sesión 3

Tarea	Descripción	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje
Ejercicios 1,4, 5, 6 de la Ficha de límites (II) de los apuntes	Se trata de ejercicios de cálculo de límites sencillos, y de funciones a trozos y logarítmicas.	20’	Aplicación y ampliación

Sesión 4

Tarea	Descripción	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje
Ejercicios 38, 41 y 42.	Se trata de ejercicios de resolución de las indeterminaciones $\frac{k}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$.	10’	Refuerzo y aplicación
Ejercicios 2, 3, 7 y 8 de la Ficha de límites (II)	Son ejercicios de aplicación de la regla II y con indeterminación $\frac{k}{0}$.	10’	

Sesión 5

Tarea	Descripción	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje
Ejercicio 45.	Se trata de un ejercicio de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ cuando la función tiene radicales.	5’	Refuerzo, aplicación y ampliación
Ejercicios 9, 11, 12, 14	Se trata ejercicios con indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ y de función logarítmica.	25’	

Sesión 6

Tarea	Descripción	Tiempo estimado	Relación con el proceso de enseñanza aprendizaje
Ejercicios 10, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 26 y 27.	Se trata ejercicios de repaso del tema, donde aparecen todas las indeterminaciones vistas y ejercicios de cálculo sencillo de límites. Se pretende que aprovechen el fin de semana, estudien y realicen los ejercicios para que si salen dudas, se resuelvan en la clase siguiente.	1h 30’	Repaso, refuerzo y afianzamiento

Capítulo 8.
Experimentación

En este capítulo se detalla la fase de experimentación, que comprende el diseño de la misma, la descripción de la muestra tomada, la recogida de datos en base a la elaboración de un cuestionario, el análisis de las cuestiones y comportamientos esperados y, finalmente, la exposición de los resultados así como una discusión sobre los mismos con la consiguiente búsqueda de soluciones a los problemas encontrados.

8.1 Muestra y diseño de la experimentación

La muestra tomada para la fase de experimentación está compuesta por el alumnado de dos clases de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales del Instituto Plaza de la Cruz.

La primera clase, de ahora en adelante grupo 1, está constituida por 25 estudiantes de los cuales 16 son chicas y 9 son chicos, todos ellos de 16-17 años a excepción de tres repetidores con 18 años. En su mayoría son de clase media y origen español. Se trata de una clase bastante habladora e inquisitiva, lo cual provoca que el comportamiento en algunas sesiones no sea el deseado, sino algo distraído e inquieto. No obstante, esta actitud es beneficiosa para que el tipo de docencia escogida, dialógica, sea aprovechada al máximo.

La segunda clase, de ahora en adelante grupo 2, está constituida por 17 estudiantes de los cuales 9 son chicas y 8 son chicos, todos ellos de 16-17 años a excepción de dos repetidores con 18 años. En su mayoría son también de clase media y origen español. A diferencia del grupo 1, llama la atención que es una clase muy callada y, salvo dos estudiantes, no suelen hacer preguntas. Durante el proceso de estudio se llevó a cabo así mismo una docencia de tipo dialógica, aunque los impedimentos de los estudiantes fueron considerables, ya que se mostraban reacios a contestar tanto de manera individual como colectiva.

Por lo general, se trata de alumnos que no tienen un gusto desarrollado por las matemáticas y que presentan dificultades importantes ya sea por falta de conocimientos previos suficientes o por falta de trabajo en casa (no realizan diariamente la tarea). En ambas clases, parte de los alumnos acuden a clases particulares (se desconoce el número exacto).

La desigual distribución del alumnado de bachillerato de Ciencias Sociales en estas dos clases (17 frente a 25) se debe exclusivamente a motivos organizativos, por elección de optativas, de manera que a efectos de resultados, se estudiarán los datos recogidos en ambas clases de manera conjunta. No obstante, con el objetivo de garantizar la representatividad de la muestra y dado que hay 7 estudiantes que han abandonado ya la asignatura (cuatro chicas y un chico del grupo 1 y dos chicas del grupo 2) bien porque repiten curso o porque no continúan en bachillerato, se han eliminado sus resultados. La razón es que no prestan atención en clase, no realizan las tareas y las pruebas que han realizado han sido devueltas en blanco o contestadas de manera totalmente aleatoria. La muestra por tanto consta de 35 estudiantes, 20 del grupo 1 y 15 del grupo 2.

8.2 El cuestionario

Con el fin de analizar no sólo los errores tipo sino también la evolución de los mismos en lo que a la resolución de límites por parte de alumnos de 1º de Bachillerato se refiere, se han elaborado 3 pruebas escritas que los estudiantes debían completar.

La primera de estas pruebas es la *evaluación inicial* (ver Cuestionario 1), con la que se pretende contrastar el nivel de conocimientos que el alumno tiene sobre las tendencias de una función y el estudio gráfico de límites. Con este fin, se propuso un ejercicio similar a los realizados en el tema anterior, donde se estudiaron diferentes tipos de funciones y sus propiedades, entre ellas, las tendencias.

La segunda de estas pruebas, es la prueba de examen (ver Cuestionario 2). Se trata de un cuestionario con un primer ejercicio sobre el estudio gráfico de límites, un segundo ejercicio con resolución de límites directos o sencillos y finalmente, un tercer ejercicio de resolución de límites con indeterminaciones. Esta prueba no va a ser tenida en cuenta para la nota y el único objetivo es evidenciar las faltas de comprensión y errores que los alumnos tienen en un primer momento sin la necesaria fase de estudio.

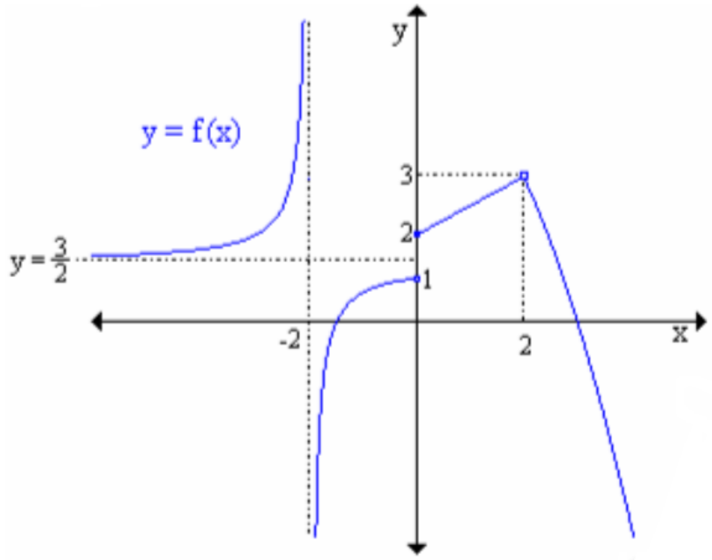
La tercera prueba es el *examen* (ver Cuestionario 3 y Cuestionario 4). En esta prueba se evalúan los contenidos estudiados tanto en las 9 primeras sesiones impartidas por la alumna como en las 8 siguientes impartidas por el tutor. Debido a la imposibilidad de que las dos clases realizaran el examen el mismo día, el tutor elaboró dos diferentes, intentando que los ejercicios tuvieran la misma complejidad y que los contenidos evaluados fueran los mismos. El examen consta de un primer ejercicio con el que se pretende conocer la capacidad de los alumnos de determinar límites gráficamente. El segundo ejercicio evalúa los conceptos de continuidad y convergencia. El tercer ejercicio consiste en resolver límites directos y relativamente sencillos. El cuarto ejercicio propuesto evalúa la resolución analítica de límites con indeterminaciones por parte de los alumnos. Finalmente, el último ejercicio consiste en resolver límites con la indeterminación 1^{∞}. Los ejercicios 1, 2 (apartados a y c), 3 y 4 son los que competen a las 9 sesiones impartidas por la alumna y por lo tanto, los que van a ser tenidos en cuenta para los resultados.

Por último, y con el principal objetivo de evaluar el impacto y adecuación del uso de GeoGebra para la explicación de límites, se repartió una *encuesta* que el alumnado rellenó en la sesión 9 con anterioridad a conocer los resultados de la prueba de examen. En esta encuesta (ver Anexo D), se han valorado además diversos aspectos relativos en primer lugar al interés por el tema de estudio (límites), a la práctica docente de la alumna, la metodología empleada (uso de GeoGebra y apuntes) y finalmente, formas y técnicas de estudio.

- **Evaluación inicial:**

Calcula:

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$
3. $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) =$
4. $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) =$
5. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) =$
6. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) =$
7. $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) =$
8. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) =$

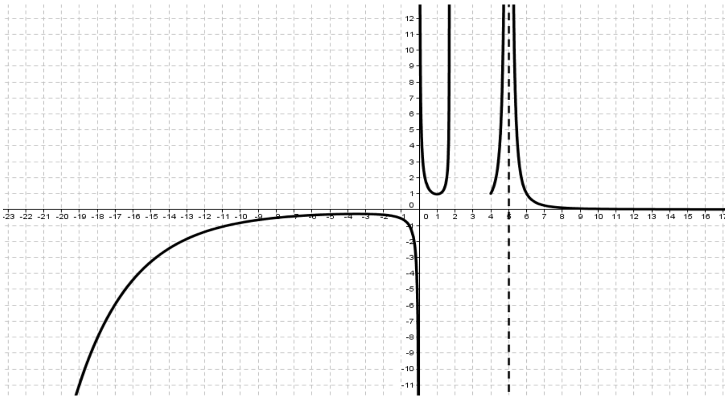


Cuestionario 1. Evaluación Inicial

- **Prueba de examen:**

Nombre: ___________________________ Clase: ___________ Fecha: ____________

Ejercicio 1. Dada la siguiente gráfica de la función f(x), determina los siguientes límites y en caso de que no existan, especifica el porqué (1.75 puntos):



1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
3. $\lim_{x\to 1} f(x) =$
4. $\lim_{x\to 6} f(x) =$
5. $\lim_{x\to 0} f(x) =$
6. $\lim_{x\to 2} f(x) =$
7. $\lim_{x\to 4} f(x) =$
8. $\lim_{x\to 5} f(x) =$

Ejercicio 2. Calcula los siguientes límites (1.5 puntos, 0.25 puntos cada apartado):

1. $\lim_{x\to 0}(x^3-2)$
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x^2-2x}$
3. $\lim_{x\to+\infty} (-2x^6-x^5+2)$
4. $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{3}x^5-x^4$
5. $\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sqrt{x^2+3}$
6. $\lim_{x\to 5} \log\,(x-5)$

Ejercicio 3. Calcula los siguientes límites (6.75 puntos, 0.75 puntos cada apartado):

1. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x<1 \\ x+3 & si\ x\geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ $\qquad$ $\lim_{x\to 1} f(x)$

2. $\lim_{x\to 6} \frac{2x}{x-6}$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2}{\sqrt{x^3+2x}+x^2}$
4. $\lim_{x\to 3} \frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}$
5. $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$
6. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-9x+18}{x^2+3x-10}$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4-3x}{x^7-5x^3+1}$
8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^4+3x}$
9. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2x^2+3x}+2x\right)$

- **Examen grupo 1:**

IES PLAZA DE LA CRUZ	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS		Curso 2012 – 2013
NOMBRE Y APELLIDOS:			
CURSO Y GRUPO: 1º BTO C y D	EVALUACIÓN: 3ª	FECHA: 16 – 05 -2013	
TEMAS DE LA PRUEBA: Límite de funciones y continuidad.			

1. (1 punto) Observa la gráfica de la función a trozos *f* y determina:

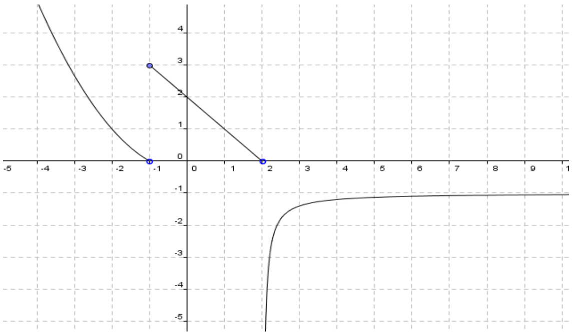
a. $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

b. $\lim_{x\to -1^-} f(x) =$

c. $\lim_{x\to -1^+} f(x) =$

d. f(-1) =

e. $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$



f. $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

g. $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

h. f(2) =

i. $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

j. $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$

2. Dada la siguiente función definida a trozos: $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^3 - 1 \; si \; x < -2} \\ \boldsymbol{3x - 3 \; si - 2 < x < 4} \\ \boldsymbol{x^2 + a \; si \; 4 < x} \end{cases}$

a. (0,5 puntos) Determina si es convergente en el punto x = – 2.
b. (0,25 puntos) Determina si es continua en el punto x = - 2.
c. (0,5 puntos) Halla el valor de *a* para que la función *f* sea convergente en el punto x = 4.

3. (1,5 puntos) Calcula los siguientes límites:

$a. \lim_{x\to -\infty} (-3x^3 + 2x^2 + 150x - 8) =$

$b. \lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x+4}}{2x-7} =$

$c. \lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2} =$

$d. \lim_{x\to +\infty} 3^{-x^3} =$

$e. \lim_{x\to 4} \dfrac{-x^2}{x-4} =$

$f. \lim_{x\to 5} \dfrac{3x-15}{x^2-25} =$

4. (5,25 puntos) Calcula los siguientes límites:

$a. \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-3}-1}{2x-4} =$

$b. \lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x^6}{4x^2+5} =$

$c. \lim_{x\to 3} \dfrac{3x^3 - 18x^2 + 27x}{5x^2 - 20x + 15} =$

$d. \lim_{x\to +\infty} \dfrac{-12x^2}{\sqrt{9x^4+1} + x^2} =$

$e. \lim_{x\to 3} \dfrac{3x+2}{x^2-9} =$

$f. \lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2-1}{x-1} - \dfrac{x^3-1}{x^2-1}\right) =$

$g. \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x} - \sqrt{4x^2-3}\right) =$

5. (1 punto) Calcula los siguientes límites:

$a. \lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{5x^3+3x-1}{5x^3-3}\right)^{x^2} =$

$b. \lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{7+6x^3}{4+3x^3}\right)^{2x} =$

Cuestionario 3. Examen grupo 1

- **Examen grupo 2:**

	IES PLAZA DE LA CRUZ	ASIGNATURA: MATEMÁTICAS	Curso 2012 – 2013
	CURSO Y GRUPO: 1º BTO C y D	EVALUACIÓN: 3ª	FECHA: 17 – 05 -2013
	TEMAS DE LA PRUEBA: Límite de funciones y continuidad.		

1. (1 punto) Observa la gráfica de la función a trozos f y determina:

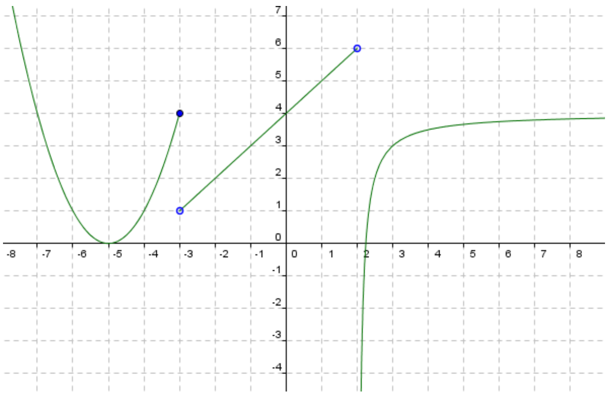
$a.\ \lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$b.\ \lim_{x\to-3^-} f(x) =$

$c.\ \lim_{x\to-3^+} f(x) =$

$d.\ f(-3) =$

$e.\ \lim_{x\to0^-} f(x) =$



$f.\ \lim_{x\to0^+} f(x) =$

$g.\ \lim_{x\to2^-} f(x) =$

$h.\ \lim_{x\to2^+} f(x) =$

$i.\ f(2) =$

$j.\ \lim_{x\to+\infty} f(x) =$

2. Dada la siguiente función definida a trozos: $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x^4 - 1\ si\ x} < -2 \\ \boldsymbol{-5x + 5\ si - 2} \le \boldsymbol{x} < 5 \\ \boldsymbol{x^2 + 2x + k\ \ si\ 5} < x \end{cases}$

d. (0,5 puntos) Determina si es convergente en el punto x = – 2.
e. (0,25 puntos) Determina si es continua en el punto x = - 2.
f. (0,5 puntos) Halla el valor de k para que la función f sea convergente en el punto x = 5.

3. (1,5 puntos) Calcula los siguientes límites:

$a.\ \lim_{x\to-\infty} (-2x^3 + 2x^2 + 8x) =$

$b.\ \lim_{x\to6} \frac{4x+2}{16-\sqrt{x+3}} =$

$c.\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{3x-7} =$

$d.\ \lim_{x\to+\infty} 7^{-x^2} =$

$e.\ \lim_{x\to7} \frac{-x^2}{x-7} =$

$f.\ \lim_{x\to3} \frac{5x-15}{x^2-9} =$

4. (5,25 puntos) Calcula los siguientes límites:

$a.\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{10x-4} =$

$b.\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^6}{4x^2+5} =$

$c.\ \lim_{x\to-3} \frac{2x^3+12x^2+18x}{5x^2+5x-30} =$

$d.\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-18x^2}{\sqrt{25x^4+1}+x^2} =$

$e.\ \lim_{x\to2} \frac{7x+5}{x^2-4} =$

$f.\ \lim_{x\to2} \left(\frac{x^2-4}{x-2} - \frac{x^3+x^2-2x-8}{x^2-4}\right) =$

$g.\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{16x^2+2x}-\sqrt{16x^2-3}} =$

5. (1 punto) Calcula los siguientes límites:

$a.\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x^2+3x}{4x^2+2x-5}\right)^{2x} =$

$b.\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5+4x^3}{5+2x^3}\right)^{x^2} =$

8.3 Cuestiones y comportamientos esperados

En esta sección se van a mostrar los comportamientos esperados en la realización de la evaluación inicial, prueba de examen y el examen.

8.3.1 Evaluación inicial

En la unidad didáctica anterior se había procedido al estudio gráfico de funciones y una de las características objeto de estudio eran las tendencias. Dado que esta evaluación inicial se realiza un día después del examen de dicho tema y el ejercicio propuesto es similar, se espera que los alumnos la lleven a cabo correctamente.

8.3.2 Prueba de examen

Esta prueba de examen se realiza cuando se ha terminado de explicar casi todo el contenido de límites (tan sólo falta la indeterminación 1^{∞} y las asíntotas). Para esta prueba se invita a los alumnos a estudiar pero se les comunica que no va a ser tenida en cuenta para la nota del tema. Teniendo en cuenta que el mismo día tienen un examen de otra asignatura, se espera que los alumnos no hayan estudiado nada o prácticamente nada, de manera que con esta prueba se pueden analizar las faltas de comprensión y errores que los alumnos tienen en un primer momento sin la necesaria fase de estudio.

Los comportamientos esperados serían los siguientes:

Ejercicio 1:

En este ejercicio, se espera que los alumnos fallen especialmente en los apartados 6 y 7. Uno de los errores esperados es que no identifiquen la necesidad de estudiar los límites laterales y se conformen con hallar tan sólo uno y concluir que este es el valor del límite.

También se espera que buena parte de los alumnos que digan que no existe el límite, no lo justifiquen o lo hagan incorrectamente.

Ejercicio 2:

En este ejercicio se espera que los alumnos realicen correctamente los apartados 1 y 3 puesto que son muy sencillos.

En el apartado 2 se espera que se equivoquen al dar valor a la expresión determinada $\frac{3}{\infty}$ y también se espera que fallen en el apartado 4 al operar con potencias, cometiendo el siguiente error: $-\frac{1}{3}(-\infty)^5 = -\infty$.

En el apartado 5 se esperan que los estudiantes no se den cuenta a la primera que se trata de una expresión determinada, introduzcan la *x* en la raíz y posiblemente, cometan fallos en este paso.

En el apartado 6 se espera que no estudien límites laterales y simplemente sustituyan en la expresión y puesto que el logaritmo de 0 no existe, concluyan que el límite no existe. También se espera que los alumnos que recurran a procedimientos gráficos, se equivoquen al representar la función, por ejemplo, desplazada hacia el lado equivocado.

Ejercicio 3:

En el apartado 1 se espera que el primer límite lo realicen correctamente y que fallen en el segundo, bien porque no realizan límites laterales o bien porque seleccionan mal el trozo de la función a trozos para ello.

En el apartado 2 un posible error tipo es que no reconozcan la indeterminación y en consecuencia no realicen límites laterales.

En el apartado 3 se espera que tengan problemas para aplicar la técnica para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Así pues, un error tipo sería elegir mal cuál es el grado mayor del numerador y denominador (concretamente que consideren que el grado del denominador es 3 porque no tienen en cuenta la raíz) o que al introducir el término en la raíz, no lo hagan correctamente. En este caso, por ejemplo, hay que dividir entre x^2 y se espera que haya alumnos que no lo eleven al cuadrado para introducirlo. Otro error podría ser también olvidarse de dividir el x^2 que queda fuera de la raíz o, incluso por despiste, olvidar copiarlo.

En el apartado 4, se espera como posible fallo que los alumnos no realicen bien el mínimo común múltiplo (ya que suelen tener problemas con las igualdades notables) y además que no operen bien con él. Por otro lado, si como denominador común no ponen el mínimo común múltiplo, al operar les saldrá en el numerador una expresión de segundo grado. Al sustituir obtendrán la indeterminación $\frac{0}{0}$, que puede ocurrir que no identifiquen, que no sepan resolver o paren porque no esperan obtener dos indeterminaciones seguidas.

En el apartado 5, un posible error es que no identifiquen la indeterminación, que no multipliquen por el conjugado, o que si lo hacen no lo multipliquen por el numerador y denominador, sino tan sólo por uno de los dos. También es posible que realicen incorrectamente el producto de los conjugados, ya que suelen tener problemas con las igualdades notables.

El apartado 6 se espera que lo realicen correctamente, aunque algún estudiante falle al factorizar porque no cambie de signo a alguna raíz o porque no se dé cuenta de que tiene que realizar Ruffini para factorizar el numerador.

En el apartado 7 no se espera ningún fallo tipo.

En el apartado 8 es posible que los estudiantes fallen al intentar introducir la *x* en la raíz. Por otro lado, pueden fallar también al elegir el término de mayor grado o al dividir la raíz por este.

Finalmente, en el apartado 9, un comportamiento esperado es que los alumnos no sean conscientes de que se enfrentan a una indeterminación y resuelvan el ejercicio como si de una expresión determinada se tratase. Otro posible fallo es, al multiplicar por el conjugado, que sólo multipliquen el numerador.

8.3.3 Examen

A pesar de que los exámenes son diferentes, los ejercicios de ambos son muy parecidos entre sí ya que en general, los cambios son prácticamente inapreciables desde el punto de vista de la resolución. Por este motivo, se van a describir los comportamientos o errores esperados por ejercicio de forma general, haciendo alusión a ambas clases aunque, en caso necesario, se realice puntualmente alguna aclaración o comentario específico para sólo un examen.

Ejercicio 1:

En este ejercicio se espera que los estudiantes fallen principalmente en los apartados *d* e *i*. La razón es que en estos apartados se pide la imagen de la función en un punto en el que previamente se han calculado los límites laterales y son distintos. En consecuencia, es posible que la no existencia de límite les confunda con el hecho de que la función no esté definida en ese punto.

Ejercicio 2 (apartados a y c):

En el apartado *a*, un error tipo es que no realicen límites laterales y si los realizan, que se equivoquen al escoger el trozo correspondiente de la función a trozos.

En el apartado *c*, un error posible es que no sepan plantear la ecuación para resolver el problema.

Ejercicio 3:

En el apartado *a* se puede esperar un error a la hora de operar con potencias y en el *b* que los alumnos no sustituyan en la función para ver la naturaleza de la expresión resultante y actúen como si se tratase de una indeterminación.

En el apartado *c*, es muy probable que los alumnos contesten que el límite es infinito, porque no sepan o no caigan en la cuenta de que al ser una potencia de base menor que 1, el resultado es cero.

En el apartado *d*, un error esperado es que los alumnos respondan que el límite es más o menos infinito.

En el apartado *e*, puede haber fallos del tipo: $\frac{-16}{0^-} = +\infty$, al no darse cuenta de que el 0^- hace que el cociente sea positivo.

Finalmente, en el apartado *f* se espera algún error por no tener claras las igualdades notables.

Ejercicio 4:

En el apartado *a* se espera que tengan problemas para aplicar la técnica para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Así pues, un error tipo podría ser introducir incorrectamente el término de mayor grado (en este caso, *x*) en la raíz.

En el apartado *b*, se espera que los alumnos apliquen correctamente la técnica de dividir por el mayor grado, pero que tengan dificultades a la hora de determinar el valor de $\frac{k}{0}$.

El apartado *c* se espera que lo realicen correctamente, aunque algún estudiante falle al factorizar porque no cambie de signo a alguna raíz o porque no se dé cuenta de que tiene que realizar Ruffini para factorizar el numerador. También es posible que saquen factor común en el numerador y denominador, hallen las raíces de la ecuación y posteriormente se les olvide ponerlos.

En el apartado *d* se espera que tengan problemas para aplicar la técnica de dividir por el término de mayor grado. Así pues, un error tipo sería elegir mal el grado (concretamente que consideren que es 4 porque no tienen en cuenta la raíz) o que al introducir el término en la raíz, no lo hagan correctamente. En este caso, por ejemplo, hay que dividir entre x^2 y se espera que haya alumnos que no lo eleven al cuadrado para introducirlo. Otro error podría ser también olvidarse de dividir el x^2 que queda fuera de la raíz o, incluso por despiste, olvidar copiarlo.

En el apartado *e*, un posible error tipo es que no reconozcan la indeterminación y, en consecuencia, no realicen límites laterales.

En el apartado *f* se espera como posible fallo que los alumnos no realicen bien el mínimo común múltiplo (ya que suelen tener problemas con las igualdades notables) y además que no operen bien con él. Por otro lado, si como denominador común no ponen el mínimo común múltiplo, al operar les saldrá en el numerador una función con términos de cuarto grado y puede que se atasquen. Como error tipo es posible que el menos que afecta al segundo cociente no lo tengan en cuenta, es decir:

$$\frac{x^2-1}{x-1}-\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)(x+1)-x^3-1}{x^2-1}$$

Este error es quizás más probable en el examen del grupo 2, ya que el numerador del segundo cociente es más largo.

Finalmente, en el apartado *g*, cabría esperar errores en la realización del conjugado, al operar con él (debido a la falta de destreza por parte de algunos estudiantes de las igualdades notables) y a no identificar la segunda indeterminación, confundiéndose con una expresión determinada, o a identificarla pero no aplicar correctamente la técnica.

8.4 Resultados

En esta sección se muestra para cada ejercicio de la evaluación inicial, prueba de examen y examen, diferentes gráficos con datos sobre los resultados de los mismos: número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco en cada ejercicio así como las respuestas dadas por los estudiantes o errores cometidos.

Para el tratamiento y posterior análisis de estos resultados, se clasifican los errores según su naturaleza en cuatro tipos diferentes: conceptuales, metodológicos, de operatoria-álgebra y de notación. Con los errores esperados en el estudio previo se esbozó un borrador para esta tabla que se fue completando tras un análisis superficial de los resultados de las pruebas. Esta tabla (ver Anexo F) sirve de guía para la recopilación y clasificación de los errores encontrados en las pruebas realizadas.

Además de los datos de las pruebas, se añaden también resultados de interés para el presente trabajo extraídos de las encuestas realizadas a los estudiantes.

Paralelamente a la exposición de estos datos, se procederá a su análisis con el objetivo de ir extrayendo ideas y propiciar la consiguiente discusión de resultados que se muestra en el siguiente apartado.

8.4.1 Evaluación inicial

En la Ilustración 6 se muestra el ejercicio correspondiente a la evaluación inicial.

Calcula:

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$
3. $\lim_{x\to-2^+} f(x) =$
4. $\lim_{x\to-2^-} f(x) =$
5. $\lim_{x\to1^+} f(x) =$
6. $\lim_{x\to1^-} f(x) =$
7. $\lim_{x\to2^+} f(x) =$
8. $\lim_{x\to2^-} f(x) =$

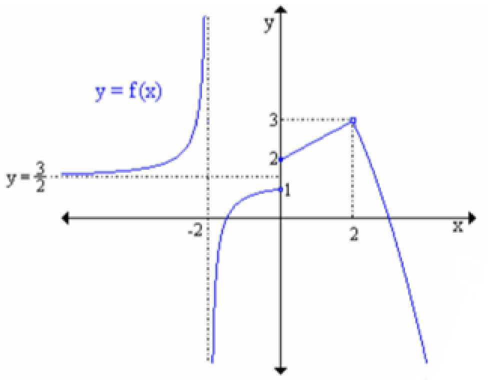


Ilustración 6. Evaluación inicial

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 1.

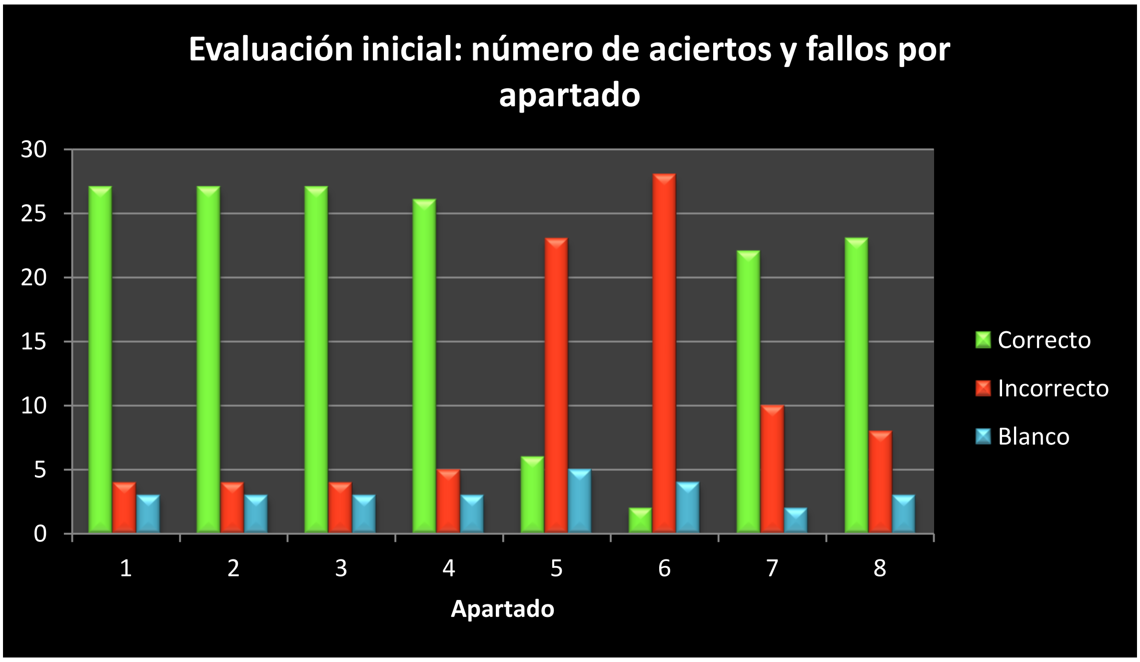


Gráfico 1. Evaluación inicial. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

Se observa que los cuatro primeros apartados son aquellos con más respuestas correctas, de hecho tienen una porcentaje de éxito bastante elevado (77% los tres primeros y 74% el cuarto) y que los dos últimos, aunque con un porcentaje de éxito menor (63% y 66% respectivamente) también han sido resueltos satisfactoriamente por la mayoría de los estudiantes.

Sin embargo, el quinto y sexto apartado muestran una clara dificultad por parte de los alumnos a la hora de resolver el ejercicio, puesto que la tasa de éxito se reduce drásticamente a un 17% y 6% respectivamente.

Con el objetivo de analizar estas dificultades y las causas de sus errores en este tipo de ejercicio, se presentan en las siguientes tablas una clasificación de las respuestas incorrectas de los estudiantes por cada apartado.

Apartado 1

Respuesta	Frecuencia
∞	4

Apartado 2

Respuesta	Frecuencia
∞	1
$-\infty$	1
0	1
-2	1

Apartado 3

Respuesta	Frecuencia
∞	1
$-\infty$	1
0	1
1	1

Apartado 4

Respuesta	Frecuencia
$-\infty$	2
1	2
2	1

Apartado 5

Respuesta	Frecuencia
∞	1
$-\infty$	1
0	2
2	**13**
3	**6**

Apartado 6

Respuesta	Frecuencia
$-\infty$	**6**
0	2
1	**11**
2	2
3	**7**

Apartado 7

Respuesta	Frecuencia
∞	1
$-\infty$	5
2	4

Apartado 8

Respuesta	Frecuencia
$-\infty$	4
0	1
1	2
2	1

En el apartado 1 se observa que la respuesta incorrecta es en todos los casos la misma. Los cuatro estudiantes que han contestado incorrectamente responden que la tendencia es infinito, posiblemente porque confunden la *x* con la *y* (error tipo esperado) o se guían por el convenio de signos del eje *x* (consideran todo lo situado a la derecha del eje y como positivo y lo situado a la izquierda como negativo).

En el apartado 2, 3 y 4 las respuestas incorrectas son pocas y además no se observa una respuesta que predomine sobre el resto. No ocurre lo mismo en el apartado 5, dónde el 57% de los estudiantes que han fallado han contestado que el límite es 2 y el 25% que es 3. Estos fallos responden a una falta de comprensión del concepto de tendencia, algo que no se había previsto puesto que es un concepto propio del tema anterior que se pensaba que estaba asimilado. Por lo general, tal y como se aprecia en las actividades tipo analizadas en el apartado 3.1, en temas anteriores están acostumbrados a hallar tendencias cuando la x tiende a más o menos infinito o en puntos donde la función presenta asíntotas. Están acostumbrados por tanto a *desplazarse sobre las ramas o asíntotas de la función para averiguar hacia dónde se dirige (normalmente límites infinitos).* En este caso, posiblemente hayan actuado de la misma manera, se han *desplazado* sobre la recta y se han dirigido hacia sus extremos, de valores 2 y 3 (sin tener en cuenta que el límite que se pide es el lateral derecho) en vez de dirigirse hacia la imagen del 1 y estudiar el comportamiento de la función en sus proximidades cuando la *x* es mayor que 1. En cualquier caso, el hecho de que la respuesta más frecuente haya sido 2, podría deberse también a que hayan dado el valor de la *x* indicado en el gráfico más cercano al 1 mirando hacia la derecha.

En el apartado 6, la respuesta más común es el 1 (39.3% de las respuestas incorrectas). Es posible que este error se deba a que nuevamente hayan confundido la *x* con la *y* o a que el 1 no esté indicado el eje de abscisas y automáticamente hayan mirado el 1 en el eje de ordenadas. De hecho, un gran número de estudiantes durante la prueba comentaron que no podían realizar el límite cuando la *x* tiende a 1 puesto que el 1 no aparece indicado en el gráfico. Ante estos comentarios, se explicó a la clase que aunque no apareciese, está situado en el eje de abscisas a igual distancia del 0 y del 2, y se dibujó en la pizarra. No obstante y a la vista de los resultados, parece que esta explicación no fue suficiente. Así pues, las otras dos respuestas más frecuentes son $-\infty$ y 3 (21,4% y 25% respectivamente). Probablemente para dar la respuesta de $-\infty$ se hayan colocado en el punto (0,1), hayan mirado hacia la izquierda, y se hayan desplazado por consiguiente hacia este lado sobre la gráfica, es decir, hacia la asíntota en x=-2. Para dar como respuesta el 3, existen dos posibilidades: que se hayan colocado en el mismo punto y se hayan desplazado sobre la recta hacia la derecha o bien, que se hayan colocado en la imagen del 1 y se hayan desplazado nuevamente sobre la recta hacia este lado.

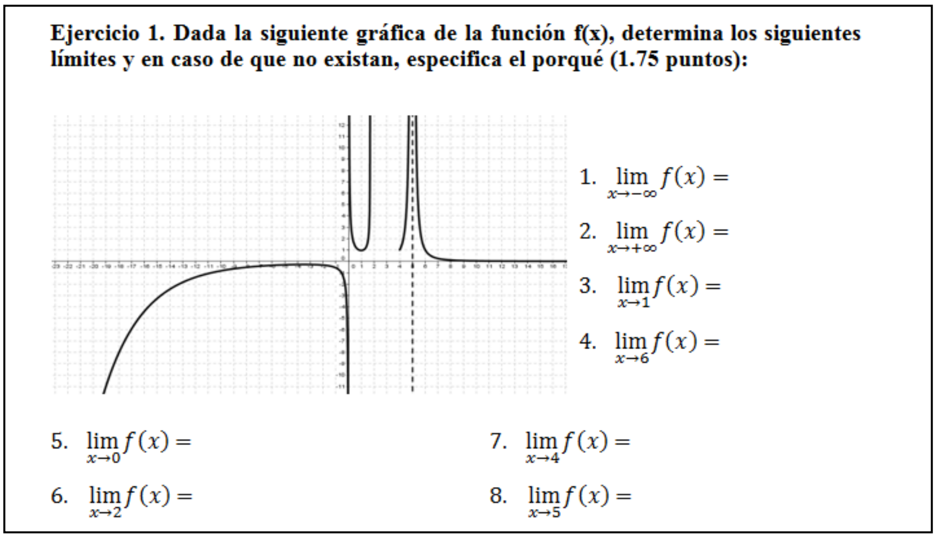
En el apartado 7, el porcentaje de aciertos es mayor, posiblemente porque el 2 sí está indicado en el eje de abscisas. No obstante, el comportamiento visto en el apartado 5 y 6 se vuelve a observar. Así pues, las dos respuestas incorrectas más repetidas del séptimo apartado son $-\infty$ y 2, siendo muy probable que se hayan colocado en el punto (2,3) y se hayan desplazado hacia la derecha e izquierda respectivamente. Una explicación de este fenómeno podría ser una mala comprensión de los estudiantes del concepto de tendencia lateral en un punto, ya que en vez de aproximarse a la imagen de dicho punto por el lado que corresponda, lo que hacen es *desplazarse* sobre la función hacia ese lado pero alejándose. En el apartado 8, el porcentaje de aciertos es mayor, no obstante la respuesta incorrecta más repetida es $-\infty$, posiblemente por la misma razón.

De los datos se desprende por tanto que las tendencias cuando la función presenta asíntotas o ramas infinitas, por lo general, son bien calculadas y que el problema reside en hallar la tendencia de una función en un punto concreto. Este problema se agrava todavía más si el punto no está dibujado en el eje. A ello se añade la dificultad de que tampoco entienden bien las tendencias laterales y que en ocasiones, confunden el eje *x* con el eje y o toman como convenio de signos el correspondiente al eje *x*.

8.4.2 Prueba de examen.

8.4.2.1 Ejercicio 1

En la Ilustración 7 se muestra el primer ejercicio de la prueba de examen.



Ejercicio 1. Dada la siguiente gráfica de la función f(x), determina los siguientes límites y en caso de que no existan, especifica el porqué (1.75 puntos):

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$
2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$
3. $\lim_{x\to1} f(x) =$
4. $\lim_{x\to6} f(x) =$
5. $\lim_{x\to0} f(x) =$
6. $\lim_{x\to2} f(x) =$
7. $\lim_{x\to4} f(x) =$
8. $\lim_{x\to5} f(x) =$

Ilustración 7. Ejercicio 1 de la prueba de examen

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 2.

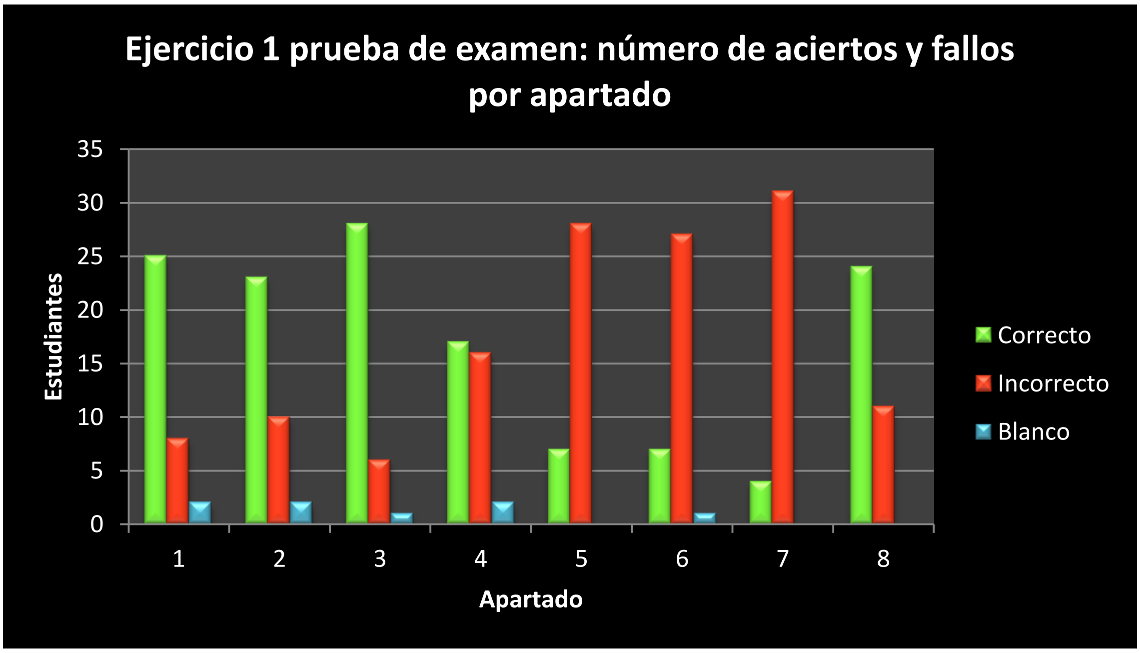


Gráfico 2. Ej. 1 prueba de examen. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

Se observa que los apartados 1, 2, 3 y 8 son aquellos con mayor número de respuestas correctas y tienen un porcentaje de éxito bastante elevado (71%, 66%, 80% y 69% respectivamente). El apartado 4 supone ya un punto de inflexión puesto que la tasa de éxito se reduce al 49% pero es el apartado 5, 6 y 7 cuando la tasa de éxito cae considerablemente, alcanzando valores de 20% para el quinto y sexto y 11% para el séptimo.

Con el objetivo de analizar estas dificultades y las causas de sus errores en este tipo de ejercicio, se presentan en las siguientes tablas una clasificación de las respuestas incorrectas de los estudiantes por cada apartado.

Apartado 1

Respuesta	Frecuencia
$+\infty$	1
0	**5**
$\nexists$	1
-20	1

Apartado 2

Respuesta	Frecuencia
∞	**7**
0	2
5	1

Apartado 3

Respuesta	Frecuencia
∞	4
0	1
$\nexists$	1

Apartado 4

Respuesta	Frecuencia
∞	**8**
0	2
$\nexists$	4
0,0005	1
5	2

Tal y como se ha comentado al analizar el Gráfico 2, la tasa de éxito de los tres primeros apartados es elevada, no obstante, dentro de las respuestas incorrectas, hay algunas que se repiten con mayor frecuencia. Así pues, en el apartado 1, la respuesta más repetida ha sido que el límite es 5 (63% de las respuestas incorrectas). La razón podría ser que se han equivocado pensando que les pedían el límite cuando la *x* tiende a infinito. En el apartado 2, el 70% de los estudiantes que contestan incorrectamente, dicen que el límite es infinito, posiblemente porque confunden eje *x* con eje *y*. En el apartado 3, se observa como la mayoría de los estudiantes responden correctamente, exceptuando una minoría que responden que el límite es infinito. En este caso, sólo 4 estudiantes han procedido de la misma manera que en la evaluación inicial, *desplazándose* sobre la función hacia la izquierda hasta la asíntota en x=0. No ocurre lo mismo en el apartado 4, ya que en este ejercicio uno de cada dos estudiantes que fallan responden que el límite es infinito, para lo cual seguramente se hayan confundido y mirado el límite en x=5 en vez de en x= 6 o, como ocurría en la evaluación inicial, se hayan posicionado en el punto (6,1) y hayan mirado hacia la izquierda, *desplazándose* sobre la gráfica hacia infinito y concluyendo por tanto que este límite es infinito.

En los siguientes tres apartados, se observa cómo los estudiantes tienen graves conflictos a la hora de entender el concepto de límite. Así pues, en el quinto apartado, el 46% de los estudiantes que fallan sostienen que el límite es infinito. La razón es que probablemente se hayan fijado únicamente en un límite lateral y no hayan calculado el otro y por lo tanto, no se hayan percatado de que son distintos. Lo mismo ocurre en el apartado 6 (el 67% de los que fallan responden que el límite es infinito, por lo que seguramente hayan calculado el límite lateral izquierdo, obviando que el derecho no existe). Con el apartado séptimo ocurre parecido, la diferencia es que ahora calculan el límite lateral derecho, obviando que el izquierdo no existe, y por tanto el 43% que responde de manera incorrecta dice que el límite es 1. No obstante, es de resaltar que todavía un 20% de los que responden incorrectamente afirman que el límite es infinito, es decir, tiene lugar el mismo fenómeno que en la evaluación inicial o en apartados anteriores: los estudiantes se colocan en el punto (4,1) y *desplazan* sobre la función hacia la asíntota. Finalmente, en el apartado 8 cabe destacar que el 73% de los que fallan, lo hacen porque dicen que el límite no existe y la mayoría argumenta que es porque no hay función o en ese punto hay una asíntota. Probablemente no hayan calculado los límites laterales porque de entrada consideran que al haber un "hueco" en x=5 los límites van a ser diferentes. Se trata de una manifestación más de que existe una parte de la clase que no acaba de entender el concepto de límite.

Apartado 5

Respuesta	Frec
∞	**13**
0	4
1	1
7	1
∄ porque no hay función	1
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 4,\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = 4$	2
Límites laterales pero no concluye	1
No explica por qué ∄ límite	5

Apartado 7

Respuesta	Frec
∞	**6**
1	**14**
0	1
5	2
0,005	1
$\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$	2
No explica por qué ∄ límite	4
∄ límite porque "no hay función"	1

Apartado 6

Respuesta	Frec
∞	**18**
1	1
0,3	1
Límites laterales pero no concluye	1
No explica por qué ∄ límite	5

Apartado 8

Respuesta	Frecuencia
0	2
0,004	1
∄	**8**

8.4.2.2 Ejercicio 2

En la Ilustración 8 se muestra el segundo ejercicio de la prueba de examen.

Ejercicio 2. Calcula los siguientes límites (1.5 puntos, 0.25 puntos cada apartado):

1. $\lim_{x \to 0}(x^3 - 2)$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{x^2 - 2x}$
3. $\lim_{x \to +\infty}(-2x^6 - x^5 + 2)$
4. $\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{3}x^5 - x^4$
5. $\lim_{x \to +\infty} x \cdot \sqrt{x^2 + 3}$
6. $\lim_{x \to 5} \log(x - 5)$

Ilustración 8. Ejercicio 2 de la prueba de examen

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 3.

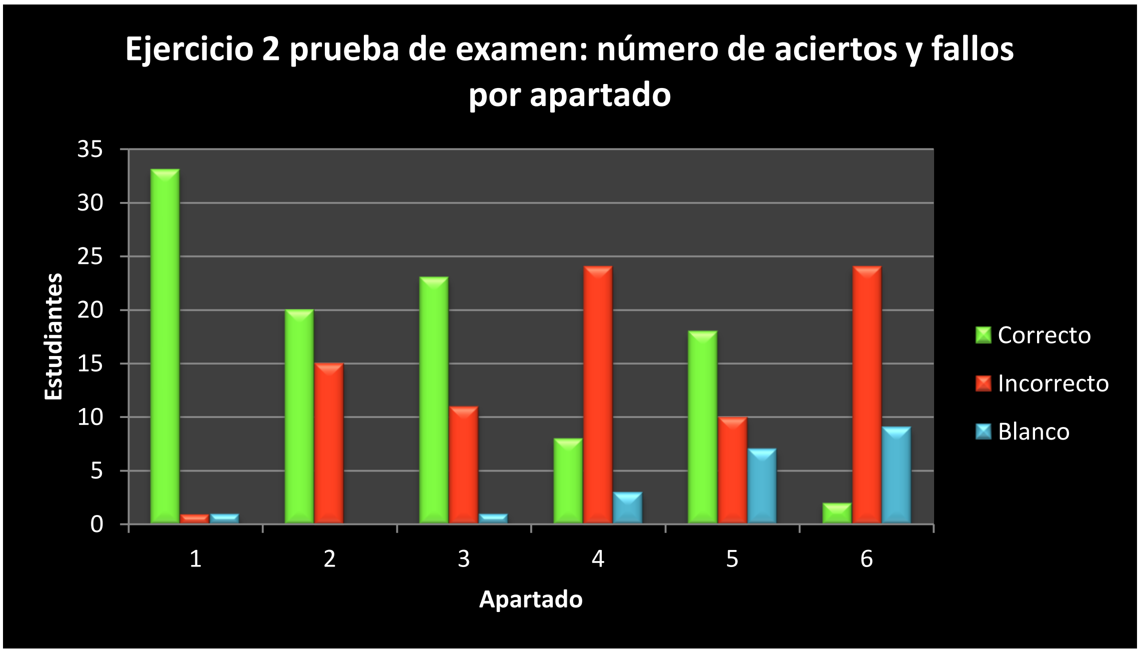


Gráfico 3. Ej. 2 prueba de examen. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

En este gráfico se observa que el primer apartado ha sido resuelto satisfactoriamente por la inmensa mayoría de los estudiantes (94%). Los apartados 2, 3 y 5 tienen porcentajes de éxito considerablemente menores, concretamente de 57%, 66% y 51% respectivamente. Los apartados 4 y 6 presentan un porcentaje de éxito muy inferior al deseado (23% y 6% respectivamente). Por otro lado, es posible apreciar como el número de respuestas en blanco va aumentando progresivamente.

A continuación, se presentan tablas con los errores cometidos por los estudiantes.

Apartado 1

Errores de operatoria y álgebra	
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9}=6$, *etc*)	1
Errores de notación	
Pone " $\lim_{x \to x_0}$ " cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función	6

Este apartado ha sido resuelto satisfactoriamente por la gran mayoría de los estudiantes, tal y como se esperaba. Únicamente tenían que sustituir en la función y el ejercicio no tenía mayor complicación. De hecho, tal y como se observa en la tabla, tan sólo hay un fallo de cálculo básico y seis faltas de notación.

Apartado 2

Errores conceptuales			
Confunde expresión determinada con indeterminación			2
Confunde indeterminación con expresión determinada			**7**
Confunde el valor de las expresiones determinadas:	$\frac{0}{k}=\infty,\quad k\neq 0$ $\frac{k}{\infty}=\infty,\quad k\neq 0$		1 2
Errores metodológicos			
Aplicación	Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)	Sustituye en todos los términos del polinomio	**17**
Errores de operatoria y álgebra			
Despiste (al sustituir, copiar, etc)			1
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9}=6$)			1
Errores de notación			
Pone " $\lim_{x \to x_0}$ " cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función			2

En este ejercicio, los estudiantes han seguido dos métodos de resolución. El primero de ellos es recurrir a la propiedad del cociente de límites, por el cual el límite del cociente es el cociente de los límites. Los estudiantes que han seguido este procedimiento, han fallado casi todos al aplicar la Regla II para el cálculo del límite de un polinomio ya que en vez de fijarse en el término de mayor grado y sustituir, han sustituido en cada uno de los términos del polinomio. El otro método seguido es dividir numerador y denominador por el término de mayor grado.

La aplicación de ambos métodos ha generado errores como los especificados en la tabla, de los cuales el más significativo es confundir una indeterminación con una expresión determinada. Así pues, una parte de los estudiantes, al sustituir en todos los términos del polinomio, ha cometido el siguiente fallo: $\infty^2 - 2\infty = \infty - \infty = 0$. Por el contrario, el error esperado de que los estudiantes se equivocaran al dar valor a la expresión $\frac{3}{\infty}$ sólo ha sido cometido por dos estudiantes.

Con este apartado se observa que los alumnos no han aprendido o entendido la Regla II para el cálculo de límites en el infinito de polinomios y que el 34% de los estudiantes tienen dificultades de tipo conceptual en lo que a indeterminaciones y expresiones determinadas se refiere.

Apartado 3

<table>
<tr><th colspan="4">Errores conceptuales</th></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde expresión determinada con indeterminación</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde indeterminación con expresión determinada</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores metodológicos</th></tr>
<tr><td>Selección</td><td colspan="2">Aplica técnica incorrecta</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Aplicación</td><td rowspan="2">Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)</td><td>Sustituye en todos los términos del polinomio</td><td>11</td></tr>
<tr><td>Divide sólo algunos términos por la x elevada al mayor exponente pero acompañada de su coeficiente</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Dividir por el de mayor grado</td><td>Sólo divide el numerador o denominador</td><td>3</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores de operatoria y álgebra</th></tr>
<tr><td colspan="3">Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($Ejemplo$: $-(-x)^4 = x^4$)</td><td>4</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores de notación</th></tr>
<tr><td colspan="3">En la resolución, no pone nunca “ $\lim\limits_{x\to x_0}$ ”</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pone “ $\lim\limits_{x\to x_0}$ ” cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función</td><td>3</td></tr>
</table>

En este apartado, como en el anterior, el error más común es sustituir en todos los términos del polinomio, error que no había sido previsto. Otro tipo de error es aplicar la técnica incorrecta para el cálculo de este tipo de límites. De estos estudiantes, 3 han utilizado la técnica de dividir numerador y denominador por la *x* elevada al máximo exponente, cometiendo el error de dividir cada término del polinomio, sin tener en cuenta que si no dividen el denominador, están variando la función dada en el enunciado.

Apartado 4

Errores conceptuales		
Confunde expresión determinada con indeterminación		1
Confunde indeterminación con expresión determinada		2
Errores metodológicos		
Selección	Aplica técnica incorrecta	2
Aplicación	Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$) — Sustituye en todos los términos del polinomio	**18**
Errores de operatoria y álgebra		
Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($Ejemplo: -(-x)^4 = x^4$)		**14**
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5,* $\sqrt{9} = 6$)		1
No utiliza paréntesis o se olvida en pasos intermedios		1
Errores de notación		
Pone "$\lim\limits_{x\to x_0}$" cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función		4

En este apartado, algo más del 50% de los estudiantes cometen el error de sustituir en todos los términos del polinomio al aplicar la Regla II. Además, tal y como se esperaba, un error tipo es el relativo a las operaciones con potencias, aunque resulta muy revelador que un porcentaje de estudiantes tan elevado (concretamente, el 40% de la clase) los que cometen este fallo.

Apartado 5

Errores conceptuales		
Confunde expresión determinada con indeterminación		4
Errores metodológicos		
Selección	Aplica técnica incorrecta	4
Aplicación	Dividir por el de mayor grado — Sólo divide el numerador o denominador	4
Procedimentales o desarrollo	No realiza el último paso por no saber a qué equivale la expresión hallada	3
Errores de operatoria y álgebra		
Dividir todos los factores en un producto $\left(\frac{x^2(x+3)}{x+1} = \frac{\frac{x^2}{x^2}(\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2})}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right)$		4
$\frac{x^7}{x^7} = 0$		1
No realiza la distributiva (se olvida del segundo sumando)		1
Extraer de una raíz un término que está sumando al resto		1
Errores de notación		
Pone "$\lim\limits_{x\to x_0}$" cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función		3

En este apartado se esperaba que los estudiantes no se dieran cuenta a la primera de que se trata de una expresión determinada, introdujesen la x en la raíz y posiblemente, cometieran fallos en este paso. No obstante, no ha sido así. De hecho, en este apartado, no hay una frecuencia elevada de un determinado error, pero es curioso un comportamiento presente en 4 estudiantes ya que cometen errores graves de forma encadenada. Así pues, estos estudiantes sustituyen en la función, consideran que la expresión obtenida es una indeterminación y, sin pararse a pensar, aplican la técnica de dividir numerador y denominador por el término de mayor grado, cometiendo además dos fallos: sólo dividen el numerador y además, dividen todos los factores de un producto.

Apartado 6

Errores conceptuales	
Logaritmo: $log0 = 0, log0 = 10, log0 = 1,\ log0 = \infty$	**9**
Concluye: $log0 = \nexists \Rightarrow \nexists\ límite$	**11**
Errores de notación	
Utilización de otros símbolos para representar $\nexists$	2
Pone "$\lim\limits_{x \to x_0}$" cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función	**9**

En este apartado, se pueden extraer varias ideas. La primera es que el 26% de los estudiantes no saben que la función logaritmo no está definida en 0. La segunda es que el 31% de los alumnos concluyen que el logaritmo de 0 no existe y que por lo tanto no existe límite (error esperado), luego no tienen claro este concepto. Así pues, consideran que como la función no está definida en ese punto, no puede existir límite. Además, se esperaba que los estudiantes no realizaran los límites laterales y el 90% de la clase no lo ha hecho.

Por último, cabe señalar que sorprendentemente, a pesar de haber mostrado cómo resolver este tipo de límites gráficamente, tan sólo una estudiante ha recurrido a la representación gráfica de la función.

8.4.2.3 Ejercicio 3

En la Ilustración 9 se muestra el tercer ejercicio de la prueba de examen.

Ejercicio 3. Calcula los siguientes límites (6.75 puntos, 0.75 puntos cada apartado):

1. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si\ x < 1 \\ x+3 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2. $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{2x}{x-6}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x^2}{\sqrt{x^3+2x}+x^2}$

4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{6}{x^2-9} - \dfrac{1}{x-3}$

5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

6. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{x^2+3x-10}$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^4-3x}{x^7-5x^3+1}$

8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \sqrt{x^4+3x}$

9. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2+3x}+2x\right)$

Ilustración 9. Ejercicio 3 de la prueba de examen

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 4.

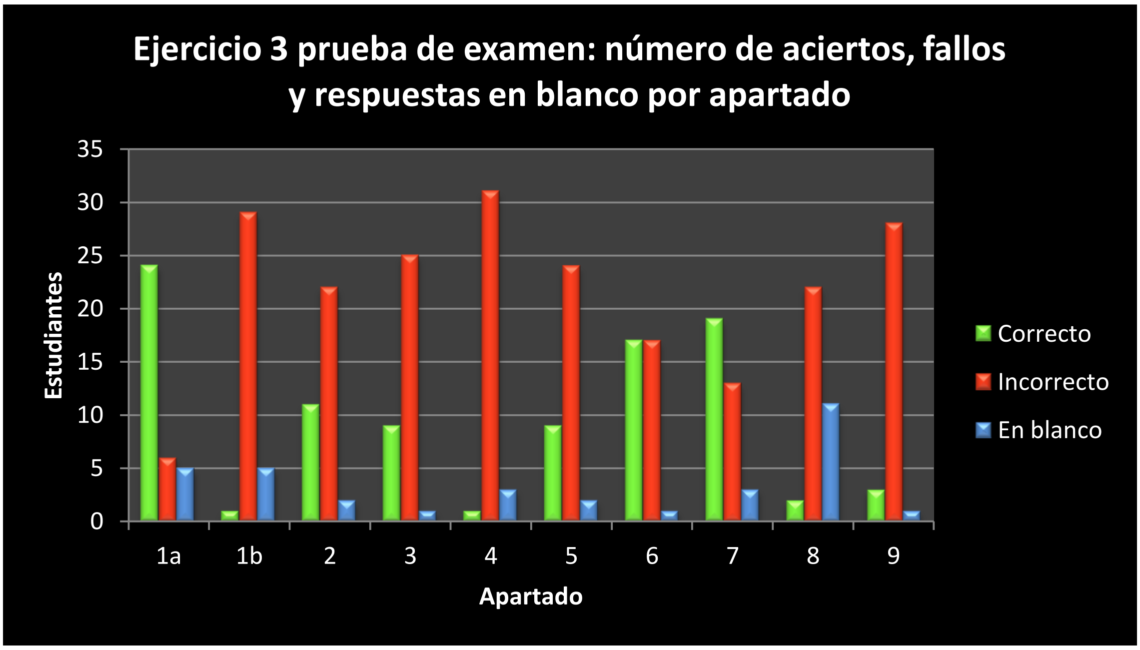


Gráfico 4. Ej. 3 prueba de examen. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

En este gráfico se observa que la primera parte del apartado 1 ha sido resuelto satisfactoriamente por la mayoría de los estudiantes (69%). Los apartados 6 y 7 presentan un porcentaje de éxito relativamente pequeños (49% y 54% respectivamente) y todavía menores son los correspondientes a los apartados 2, 3 y 5 (31% el 2 y 26% el apartado 3 y 5). Finalmente, la primera parte del apartado 1 y los apartados 4, 8 y 9 son los que resultan más difíciles a los estudiantes ya que tan sólo un estudiante ha respondido correctamente a los apartados 1b y 4, y tan sólo el 6% y el 9% ha respondido correctamente a los apartados 8 y 9 respectivamente.

A continuación, se presentan tablas con los errores cometidos por los estudiantes.

Apartado 1a

Errores metodológicos			
Aplicación	Límites laterales	Selecciona mal el trozo (función a trozos)	5
Errores de operatoria y álgebra			
Error de cálculo básico *(Ejemplo: 2+4=5,* $\sqrt{9} = 6$*)*			1
Errores de notación			
En la resolución, no pone nunca " $\lim_{x \to x_0}$ "			**9**
Pone " $\lim_{x \to x_0}$ " cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función			**6**

En este ejercicio, el error más común es seleccionar mal el trozo de la función ya que han escogido $x^2 + 1$, correspondiente a x<1. Tal y como se observa, el resto de errores significativos son relativos a la notación.

Apartado 1b

Errores metodológicos			
Aplicación	Límites laterales	No estudia límites laterales (función a trozos)	**28**
		Selecciona mal el trozo (función a trozos)	2
		Realiza los límites laterales pero no concluye	1
Errores de notación			
En la resolución, no pone nunca " $\lim_{x \to x_0}$ "			**9**
Pone " $\lim_{x \to x_0}$ " cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función			6

En este apartado, es muy significativo el hecho de que el 80% de los estudiantes no adviertan la necesidad de estudiar límites laterales (error esperado) y simplemente sustituyan, la mayoría, en el trozo de la función $x + 3$ (para $x \geq 1$).

Apartado 2

Errores conceptuales			
Confunde indeterminación con expresión determinada			**11**
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{k}{\infty} = \infty, \quad k \neq 0$		2
Errores metodológicos			
Selección	No aplica técnica		4
	Aplica técnica incorrecta		4
Aplicación	Límites laterales	Si es $\lim\limits_{x \to x_0}$, hacen $x \to 0^{+/-}$ en vez de $x \to {x_0}^{+/-}$	1
		Realiza los límites laterales pero no concluye	4
Errores de operatoria y álgebra			
Error de cálculo básico *(Ejemplo: 2+4=5,* $\sqrt{9} = 6$*)*			1
Errores de notación			
Utilización de otros símbolos para representar $\nexists$			1
En la resolución, no pone nunca " $\lim\limits_{x \to x_0}$ "			1
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación			1
Pone " $\lim\limits_{x \to x_0}$ " cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función			3

El error más común de este apartado es que el 31% de los estudiantes no reconocen que la expresión obtenida es una indeterminación del tipo $\frac{k}{0}$ (error esperado) y de hecho, escriben: $\frac{12}{0} = +\infty$. De entre los que reconocen que es una indeterminación, hay 4 estudiantes que no prosiguen, es decir, no aplican ninguna técnica para resolverla y otros 4 estudiantes aplican la técnica incorrecta. De entre aquellos que sí realizan los límites laterales, hay otros 4 estudiantes que no concluyen, a partir de estos límites laterales, cual es el valor del límite.

Apartado 3

Errores conceptuales			
Confunde expresión determinada con indeterminación			1
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{k}{\infty} = \infty, \quad k \neq 0$		1
Errores metodológicos			
Selección	No aplica técnica Aplica técnica incorrecta (multiplicar por el conjugado)		1 **14**
Aplicación	Multiplicar por el conjugado	Sólo multiplica el numerador o denominador	1
	Dividir por el de mayor grado	Elige mal el grado Divide el numerador con diferente exponente que el denominador Divide lo que hay en el interior de la raíz con diferente exponente	3 3 2
	Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)	Sustituye en todos los términos del polinomio La utiliza con funciones radicales	**7** **5**
Errores de operatoria y álgebra			
Al introducir o extraer un término de una raíz			4
Simplificar términos que están sumando en $\left(Ejemplo: \frac{x^2-\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}\right)$			1
Dividir todos los factores en un producto $\left(Ejemplo: \frac{x^2(x+3)}{x+1} = \frac{\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right)$			4
$\frac{x^7}{x^7} = 0$			1
Signo menos multiplicando a un paréntesis con dos términos, se olvidan de multiplicar el signo por el segundo término			1
Error al simplificar $\frac{x^3}{x^3} = x$			1
No realiza la distributiva (se olvida del segundo sumando)			5
Errores de notación			
En la resolución, no pone nunca " $\lim_{x\to x_0}$ "			2
Se olvida en algún paso intermedio de poner " $\lim_{x\to x_0}$ "			**9**
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación			**10**
Pone " $\lim_{x\to x_0}$ " cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función			**6**

En este apartado se esperaba que los alumnos tuvieran problemas para aplicar la técnica para resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Así pues, se pensaba que un error tipo sería elegir incorrectamente el grado mayor o que al introducir el término en la raíz, no lo hicieran correctamente. En este caso, estos errores en la aplicación de la técnica no tienen una frecuencia muy elevada.

No obstante, en este ejercicio, es muy llamativo que el 40% de los estudiantes opte por multiplicar el numerador y denominador por el conjugado, la mayoría de las veces sin tan siquiera analizar de qué tipo de indeterminación se trata (de los 14 estudiantes, sólo 5 sustituyen previamente para hallar la indeterminación). De estos 14 estudiantes que multiplican por el conjugado, sólo 4 aplican después la técnica adecuada de dividir numerador y denominador por el término de mayor grado pero dos cometen fallos de cálculo y los otros dos no llegan hasta el final.

Por otro lado, es llamativo como para hallar la indeterminación mediante la sustitución de infinito en la función, 12 estudiantes (lo que supone algo más de la tercera parte de los estudiantes) aplican incorrectamente la Regla II. Además, conforme los apartados requieren más pasos intermedios, se hacen más patentes los fallos de notación.

Apartado 4

Errores conceptuales			
Se equivoca con el tipo de indeterminación			1
Confunde indeterminación con expresión determinada			3
Errores metodológicos			
Selección	No aplica técnica		3
	Aplica técnica incorrecta		**11**
Aplicación	Dividir por el de mayor grado	Divide el numerador con diferente exponente que el denominador	1
Procedimentales-desarrollo	Aplica técnica correcta pero ante resultado no satisfactorio u otra indeterminación, aplica técnica incorrecta		2
	Resuelve indeterminación y no continúa o se equivoca en pasos posteriores		4
Errores de operatoria y álgebra			
Despiste (al sustituir, copiar, etc)			2
Simplificar términos que están sumando en $\left(Ejemplo: \frac{x^2-\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}\right)$			4
$\frac{x^7}{x^7}=0$			1
No calcula correctamente el mínimo común múltiplo			1
Opera mal con el mínimo común múltiplo (*Ejemplo:* $\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x+3}=\frac{6(x+3)-1(x-3)}{x^2-9}$)			3
Signo menos multiplicando a un paréntesis con dos términos, se olvidan de multiplicar el signo por el segundo término			3
A la hora de factorizar, no cambian el signo a la raíz $Ejemplo: x=3 \Rightarrow (x+3)$			1
A la hora de factorizar, si la raíz es doble, se olvida de contarla dos veces			1
No utiliza paréntesis o se olvida en pasos intermedios			1
Errores de notación			
Utilización de otros símbolos para representar $\nexists$			1
Se olvida en algún paso intermedio de poner " $\lim_{x\to x_0}$ "			4
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación			5
Pone " $\lim_{x\to x_0}$ " cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función			**8**

En este apartado, 11 estudiantes (lo que supone el 31%) han aplicado en algún paso una técnica incorrecta. De hecho, 8 de ellos han realizado la siguiente operación: $\frac{6}{0} - \frac{1}{0} = \frac{5}{0}$, y tras considerar que se trata de una indeterminación del tipo $\frac{k}{0}$, han realizado límites laterales. Los otros tres restantes han resuelto correctamente la indeterminación $\infty - \infty$ pero, al enfrentarse a la segunda indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$, han decidido dividir numerador y denominador por el término de mayor grado.

En este apartado han aumentado considerablemente los errores de cálculo y álgebra que han sido determinantes para que tan sólo una persona haya resuelto el ejercicio correctamente. En este sentido, se esperaba como posible fallo que los alumnos no realizaran bien el mínimo común múltiplo o que no operaran bien con él aunque los errores de operatoria han sido más variados de lo previsto, tal y como se aprecia en la tabla.

Apartado 5

En este ejercicio, llaman especialmente la atención los errores de cálculo y álgebra ya que son bastante numerosos. También es curioso que 6 estudiantes, sin mirar de qué tipo de indeterminación se trata (error esperado), hayan optado por dividir numerador y denominador por el término de mayor grado, como si de una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ se tratase. Incluso, una vez dividido, han llegado a hacer, por ejemplo, $2/x \to 0$ sin tener en cuenta que ahora *x* tiende a 2 y no a infinito.

Por otro lado, se esperaban errores en la aplicación de la técnica de multiplicar por el conjugado, como multiplicar sólo el numerador o denominador, realizar incorrectamente el producto de los conjugados, etc. No obstante, estos errores han sido minoritarios.

<table>
<tr><th colspan="4">Errores conceptuales</th></tr>
<tr><td colspan="3">Se equivoca con el tipo de indeterminación</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde expresión determinada con indeterminación</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde indeterminación con expresión determinada</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores metodológicos</th></tr>
<tr><td>Selección</td><td colspan="2">No aplica técnica
Aplica técnica incorrecta</td><td>2
6</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Aplicación</td><td rowspan="4">Multiplicar por el conjugado</td><td>Sólo multiplica el numerador o denominador</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Calcula mal el conjugado</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Aplica la propiedad distributiva al conjugado y no continúa</td><td>1</td></tr>
<tr><td>El signo del conjugado es distinto en el numerador y denominador</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Dividir por el de mayor grado</td><td>Divide lo que hay en el interior de la raíz con diferente exponente</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Factorizar</td><td>Intenta factorizar una raíz</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Procedimentales-desarrollo</td><td colspan="2">Aplica regla correcta pero ante resultado no satisfactorio u otra indeterminación, aplica técnica incorrecta</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Resuelve indeterminación y no continúa o se equivoca en pasos posteriores</td><td>2</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores de operatoria y álgebra</th></tr>
<tr><td colspan="3">Despiste (al sustituir, copiar, etc)</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Identidades notables ($Ejemplo$: $(x+2)^2 = x^2 + 4$)</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Identidades notables ($Ejemplo$: $(x-2)(x+2) = x^2 + 4$)</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dividir todos los factores en un producto $\left(Ejemplo: \frac{x^2(x+3)}{x+1} = \frac{\frac{x^2}{x^2}(\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2})}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right)$</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\frac{x^7}{x^7} = 0$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Error de cálculo básico *(Ejemplo: 2+4=5,* $\sqrt{9} = 6$*)*</td><td>**7**</td></tr>
<tr><td colspan="3">Extraer de una raíz un término que está sumando al resto</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Al dividir una suma, no divide todos los sumandos</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">No utiliza paréntesis o se olvida en pasos intermedios</td><td>**6**</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores de notación</th></tr>
<tr><td colspan="3">En la resolución, no pone nunca “ $\lim_{x\to x_0}$ ”</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Se olvida en algún paso intermedio de poner “ $\lim_{x\to x_0}$ ”</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="3">No pone que la expresión obtenida es una indeterminación</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pone “ $\lim_{x\to x_0}$ ” cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función</td><td>6</td></tr>
</table>

Apartado 6

Errores conceptuales		
Se equivoca con el tipo de indeterminación		1
Confunde indeterminación con expresión determinada		1
Errores metodológicos		
Selección	No aplica técnica Aplica técnica incorrecta	2 4
Procedimentales-desarrollo	Resuelve indeterminación y no continúa o se equivoca en pasos posteriores	2
Errores de operatoria y álgebra		
Despiste (al sustituir, copiar, etc)		2
A la hora de factorizar, no cambian el signo a la raíz $Ejemplo: x = 3 \Rightarrow (x + 3)$		3
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9} = 6$)		3
No utiliza paréntesis o se olvida en pasos intermedios		1
Saca factor común cuando no es posible		1
Errores de notación		
En la resolución, no pone nunca " $\lim_{x \to x_0}$ "		2
Se olvida en algún paso intermedio de poner " $\lim_{x \to x_0}$ "		1
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación		13
Pone que la expresión obtenida es una indeterminación, pero no especifica el tipo		1
Pone " $\lim_{x \to x_0}$ " cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función		7

En este ejercicio no se puede hablar de un error tipo. Por lo general aplican la técnica correcta (factorizar) pero cometen errores de operatoria o una vez factorizado, no continúan.

Apartado 7

<table>
<tr><th colspan="3">Errores conceptuales</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde indeterminación con expresión determinada</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Confunde el valor de las expresiones determinadas</td><td colspan="2">$\frac{0}{k} = \infty, \quad k \neq 0$</td><td>2</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores metodológicos</th><th></th></tr>
<tr><td>Selección</td><td colspan="2">No aplica técnica
Aplica técnica incorrecta</td><td>1
1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aplicación</td><td>Dividir por el de mayor grado</td><td>Divide el numerador con diferente exponente que el denominador</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)</td><td>Sustituye en todos los términos del polinomio</td><td>7</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores de operatoria y álgebra</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="3">$\frac{x^7}{x^7} = 0$</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="3">Error al simplificar $\frac{x^3}{x^3} = x$</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores de notación</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="3">En la resolución, no pone nunca “ $\lim_{x \to x_0}$ ”</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="3">Se olvida en algún paso intermedio de poner “ $\lim_{x \to x_0}$ ”</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">No pone que la expresión obtenida es una indeterminación</td><td>14</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pone que la expresión obtenida es una indeterminación, pero no especifica el tipo</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pone “ $\lim_{x \to x_0}$ ” cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función</td><td>6</td></tr>
</table>

En este apartado resalta nuevamente la incorrecta aplicación de la Regla II en tanto que sustituyen en todos los términos del polinomio para el cálculo de la indeterminación a la que se tienen que enfrentar. No obstante, también llama la atención especialmente el error al simplificar: $\frac{x^7}{x^7} = 0$.

Apartado 8

<table>
<tr><th colspan="3">Errores conceptuales</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="3">Se equivoca con el tipo de indeterminación</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde expresión determinada con indeterminación</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde indeterminación con expresión determinada</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Confunde el valor de las expresiones determinadas</td><td colspan="2">$\frac{0}{k} = \infty, \quad k \neq 0$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{k}{\infty} = \infty, \quad k \neq 0$</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{k}{0} = p, \quad k, p \neq 0$</td><td>2</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores metodológicos</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="2">Selección</td><td colspan="2">No aplica técnica</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aplica técnica incorrecta</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Aplicación</td><td rowspan="4">Dividir por el de mayor grado</td><td>Elige mal el grado</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Divide el numerador con diferente exponente que el denominador</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Divide lo que hay en el interior de la raíz con diferente exponente</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Sólo divide el numerador o denominador</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)</td><td>Sustituye en todos los términos del polinomio</td><td>5</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores de operatoria y álgebra</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="3">Al introducir o extraer un término de una raíz</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dividir todos los factores en un producto $\left(Ejemplo\text{: } \frac{x^2(x+3)}{x+1} = \frac{\frac{x^2}{x^2}(\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2})}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right)$</td><td>5</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores de notación</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="3">En la resolución, no pone nunca “ $\lim_{x\to x_0}$ ”</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Se olvida en algún paso intermedio de poner “ $\lim_{x\to x_0}$ ”</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">No pone que la expresión obtenida es una indeterminación</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pone que la expresión obtenida es una indeterminación, pero no especifica el tipo</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pone “ $\lim_{x\to x_0}$ ” cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función</td><td>6</td></tr>
</table>

En este apartado, se esperaba que los estudiantes fallasen al intentar introducir la *x* en la raíz, al elegir el término de mayor grado o al dividir la raíz por este. Sin embargo, el error más cometido ha sido confundir una indeterminación, $\frac{\infty}{\infty}$ con una expresión determinada (∞ o 0), confundir el valor de las expresiones determinadas y, tras identificar que se trata de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, no saber qué técnica aplicar.

Apartado 9

<table>
<tr><th colspan="3">Errores conceptuales</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="3">Se equivoca con el tipo de indeterminación</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde expresión determinada con indeterminación</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde indeterminación con expresión determinada</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Confunde el valor de las expresiones determinadas</td><td colspan="2">$\frac{k}{0}=p, \quad k,p\neq 0$</td><td>3</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores metodológicos</th><th></th></tr>
<tr><td>Selección</td><td colspan="2">Aplica técnica incorrecta</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Aplicación</td><td rowspan="2">Multiplicar por el conjugado</td><td>Sólo multiplica el numerador o denominador</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Calcula mal el conjugado</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Dividir por el de mayor grado</td><td>Elige mal el grado</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Divide el numerador con diferente exponente que el denominador</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Sólo divide el numerador o denominador</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)</td><td>Sustituye en todos los términos del polinomio</td><td>11</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores de operatoria y álgebra</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="3">Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($Ejemplo$: $-(-x)^4 = x^4$)</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="3">Despistes (al sustituir, copiar, etc)</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cambio de signo de una expresión</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Identidades notables. $Ejemplo$: $(x-2)(x+2)=x^2+4)$</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Al introducir o extraer un término de una raíz</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Simplificar términos que están sumando. $Ejemplo$: $\left(\frac{x^2-\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}\right)$</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dividir todos los factores en un producto. $Ejemplo$: $\left(\frac{x^2(x+3)}{x+1}=\frac{\frac{x^2}{x^2}(\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2})}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right)$</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores de notación</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="3">En la resolución, no pone nunca “ $\lim\limits_{x\to x_0}$ ”</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Se olvida en algún paso intermedio de poner “ $\lim\limits_{x\to x_0}$ ”</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="3">No pone que la expresión obtenida es una indeterminación</td><td>12</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pone que la expresión obtenida es una indeterminación, pero no especifica el tipo</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pone “ $\lim\limits_{x\to x_0}$ ” cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función</td><td>5</td></tr>
</table>

En este apartado, un comportamiento esperado era que los alumnos no fueran conscientes de que se estaban enfrentando a una indeterminación y que resolviesen el ejercicio como si de una expresión determinada se tratase. No obstante, este error no ha sucedido. Otro fallo esperado era que al multiplicar por el conjugado, sólo multiplicasen el numerador y sin embargo, este error ha sido cometido únicamente por tres estudiantes.

El error encontrado más llamativo es que no aplican la Regla II a $(2x^2 + 3)$ y $2x$ por separado (sabiendo que el límite de la suma es la suma de los límites) para calcular la indeterminación, sino que lo aplican a toda la función, a pesar de que no sea polinómica. Otro aspecto importante es que tienen problemas considerables a la hora de operar con potencias.

8.4.3 <u>Examen</u>

Puesto que el examen realizado por el grupo 1 y grupo 2 es distinto, se va a mostrar para cada grupo, el ejercicio del examen con las correspondientes respuestas y errores.

8.4.3.1 Ejercicio 1

Grupo 1

En la Ilustración 10 se muestra el primer ejercicio del examen del grupo 1.

1. (1 punto) Observa la gráfica de la función a trozos *f* y determina:

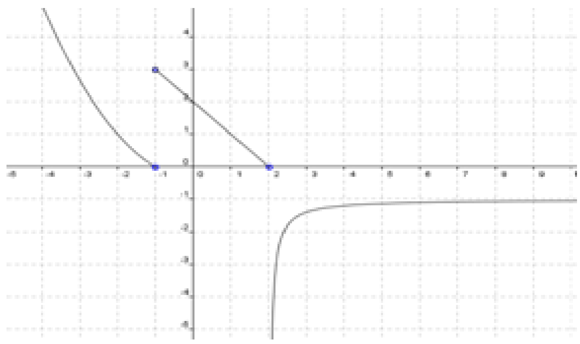
a. $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

b. $\lim_{x \to -1^-} f(x) =$

c. $\lim_{x \to -1^+} f(x) =$

d. $f(-1) =$

e. $\lim_{x \to 0^-} f(x) =$



f. $\lim_{x \to 0^+} f(x) =$

g. $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

h. $f(2) =$

i. $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

j. $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

Ilustración 10. Ejercicio 1 del examen del grupo 1

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 5.

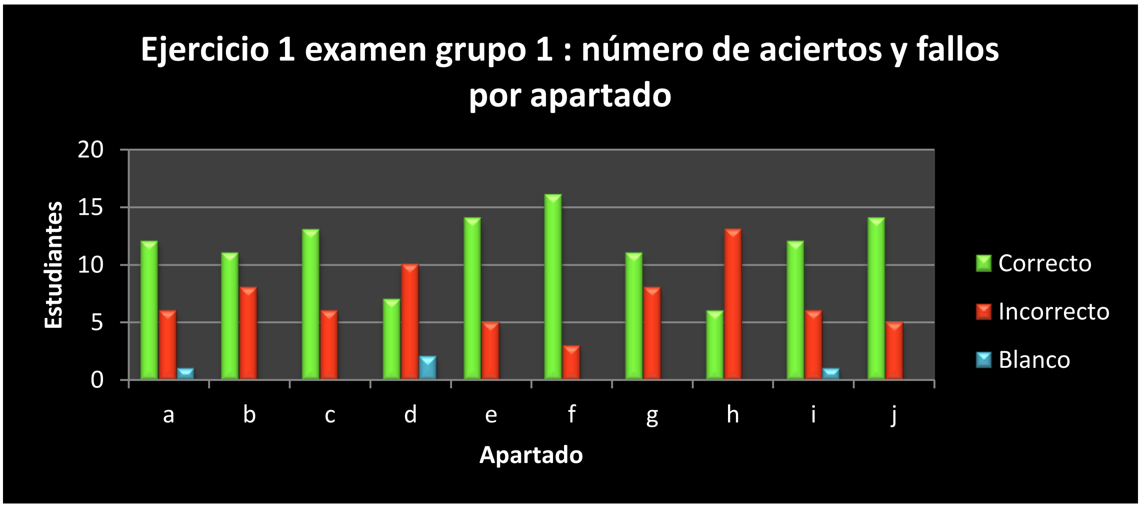


Gráfico 5. Ej. 1 examen grupo 1. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

Se observa que los apartados *e*, *f* y *j* son aquellos con mayores porcentajes de éxito (74%, 84% y 74% respectivamente). Les siguen los apartados *a*, *b*, *c*, *g* e *i* (con un 63%, 58%, 68%, 58% y 63% de tasa de éxito respectivamente). Los ejercicios que menos respuestas correctas han recibido son los apartados *d* (37%) y *h* (32%). Es muy significativo que, tal y como se esperaba, el apartado *d* que pedía el cálculo de la imagen de una función en un punto a través de la gráfica, sea uno de los dos con peores resultados, especialmente teniendo en cuenta que el trabajo con funciones en el tema anterior ha sido considerable.

Con el objetivo de analizar estas dificultades y las causas de sus errores en este tipo de ejercicio, se presentan en las siguientes tablas una clasificación de las respuestas incorrectas de los estudiantes por cada apartado.

Apartado a

Respuesta	Frecuencia
$-\infty$	**5**
2	1

Apartado b

Respuesta	Frecuencia
∞	1
-1	3
$\nexists$	2
1	1
2	1

Apartado c

Respuesta	Frecuencia
∞	1
2	**5**

Apartado d

Respuesta	Frecuencia
∞	1
$\nexists$	**7**
0	1
-1	1

Apartado e

Respuesta	Frecuencia
-1	4

Apartado f

Respuesta	Frecuencia
∞	1
3	2

Apartado g

Respuesta	Frecuencia
∞	1
2	3
1	1
-1	2
3	1

Apartado h

Respuesta	Frecuencia
∞	2
2	**6**
∄	2
0	2
3	1

Apartado i

Respuesta	Frecuencia
∞	1
∄	1
2	2
-1	1
0	2

Apartado j

Respuesta	Frecuencia
∞	4
3	1

Tal y como se observa las tablas, en el apartado *a* la respuesta incorrecta más común (con un 83%) es menos infinito. El motivo puede ser que siguen confundiendo el eje *x* con el eje *y* y el convenio de signo lo ven con respecto al eje *x*, de manera que la función situada a la izquierda del eje *y* la consideran negativa y la situada a la derecha positiva, motivo por el cual el resultado les sale menos infinito. En el apartado *c*, es posible que también hayan confundido la *x* con la *y*, y por lo tanto el límite es 2 para el 83% de los estudiantes que han fallado. El mismo error ha podido darse en el apartado *e* y *j*. En el apartado *h* es probable que hayan calculado el límite lateral izquierdo en vez del derecho y en lugar de poner 0 (valor de la función en x=2), hayan puesto 2, que es el valor de la *x* (confunden nuevamente el eje *x* con el *y*).

En el apartado *d*, el segundo con más porcentaje de fallos, el 70% de los alumnos que no contestan de manera correcta sostienen que la función no está definida en el punto de abscisa -1. Puede haber dos causas, una es que sólo se hayan fijado en que en el punto (-1,0) no hay función o bien que se hayan liado al pensar que como la función en -1 no es continua, no está definida. De hecho en los apartados previos se pide el cálculo de los límites laterales y son distintos. En consecuencia, es posible que la no existencia de límite les haya confundido. Esto corrobora el error esperado.

En el apartado *b*, *f*, *g* e *i* no se puede hablar de un error tipo porque apenas ha habido errores o la variedad de respuestas es grande.

Grupo 2

En la Ilustración 11 se muestra el primer ejercicio del examen del grupo 2.

1. (1 punto) Observa la gráfica de la función a trozos *f* y determina:

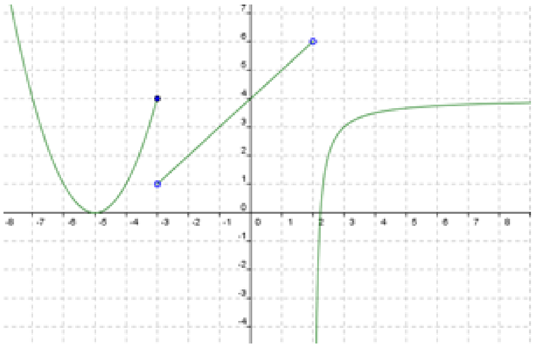
$a.\ \lim_{x\to-\infty} f(x) =$

$b.\ \lim_{x\to-3^-} f(x) =$

$c.\ \lim_{x\to-3^+} f(x) =$

$d.\ f(-3) =$

$e.\ \lim_{x\to0^-} f(x) =$



$f.\ \lim_{x\to0^+} f(x) =$

$g.\ \lim_{x\to2^-} f(x) =$

$h.\ \lim_{x\to2^+} f(x) =$

$i.\ f(2) =$

$j.\ \lim_{x\to+\infty} f(x) =$

Ilustración 11. Ejercicio 1 examen grupo 2

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 6.

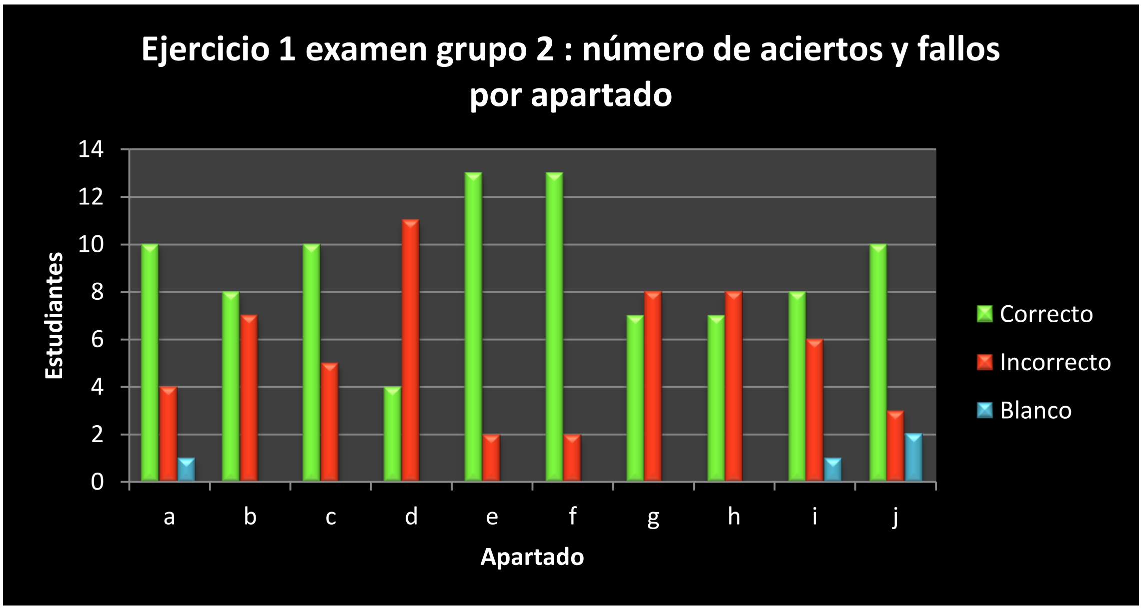


Gráfico 6. Ej. 1 examen grupo 2. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

Los apartados con mayor porcentaje de respuestas correctas son el *e* y el *f* (87%). Le siguen los apartados *a*, *c* y *j* con un 67%, el *b* y el *i* con un 53%, el *g* y *h* con un 47% y finalmente, el *d*, con un porcentaje de respuestas correctas del 27%.

Teniendo en cuenta que el ejercicio 1 del examen de cada grupo es muy similar, no es de extrañar que los resultados del ejercicio sean también muy parecidos. De hecho, comparando el Gráfico 5 y el Gráfico 6, se observa que los apartados con un porcentaje de fallos más elevado son el *d*, *g* y *h*. Nuevamente resulta significativo que el peor ejercicio haya sido el de cálculo de la imagen de una función en un punto a través de la gráfica.

Apartado a

Respuesta	Frecuencia
$-\infty$	**4**

Apartado b

Respuesta	Frecuencia
∞	1
1	3
-3	1
-4	1
3	1

Apartado c

Respuesta	Frecuencia
4	1
-3	1
3	1
$\nexists$	2

Apartado d

Respuesta	Frecuencia
1	2
$\nexists$	**8**
-3	1

Apartado e

Respuesta	Frecuencia
1	1
$\nexists$	1

Apartado f

Respuesta	Frecuencia
6	1
$\nexists$	1

Apartado g

Respuesta	Frecuencia
∞	2
0	2
$\nexists$	2
2	1
4	1

Apartado h

Respuesta	Frecuencia
∞	**4**
0	1
1	1
2	1

Apartado i

Respuesta	Frecuencia
0	1
6	1
2	2

Apartado j

Respuesta	Frecuencia
∞	2
6	1

En este ejercicio, en todos los apartados menos en el *a*, *d* y el *h*, hay o bien pocos errores o bien mucha variedad pero con poca frecuencia, de manera que no se puede hablar de un error tipo.

No es el caso del apartado *d*, que ha sido el peor realizado por los estudiantes. En este caso, el 73% de las respuestas incorrectas es que no existe imagen del -3. Se trata exactamente del mismo fallo que se daba en la otra clase. Las razones atribuibles son que o bien sólo se hayan fijado en que en el punto (-3,1) no hay función o bien que se hayan liado al pensar que como la función en -3 no es continua, no está definida. En el apartado *a* y *h* vuelve a ocurrir lo mismo que sucedió con el apartado *a* del grupo 1. Así pues, vuelven a considerar que la parte a la izquierda del eje y es negativa y la parte a la derecha, positiva (convenio para el eje x), confundiendo nuevamente el convenio de signos para el eje *y*.

8.4.3.2 Ejercicio 2

Grupo 1

En la Ilustración 12 se muestra el segundo ejercicio del examen del grupo 1.

2. Dada la siguiente función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 \; si \; x < -2 \\ 3x - 3 \; si -2 < x < 4 \\ x^2 + a \; si \; 4 < x \end{cases}$

a. (0,5 puntos) Determina si es convergente en el punto x = – 2.
b. (0,25 puntos) Determina si es continua en el punto x = - 2.
c. (0,5 puntos) Halla el valor de *a* para que la función *f* sea convergente en el punto x = 4.

Ilustración 12. Ejercicio 2 del examen del grupo 1

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 7.

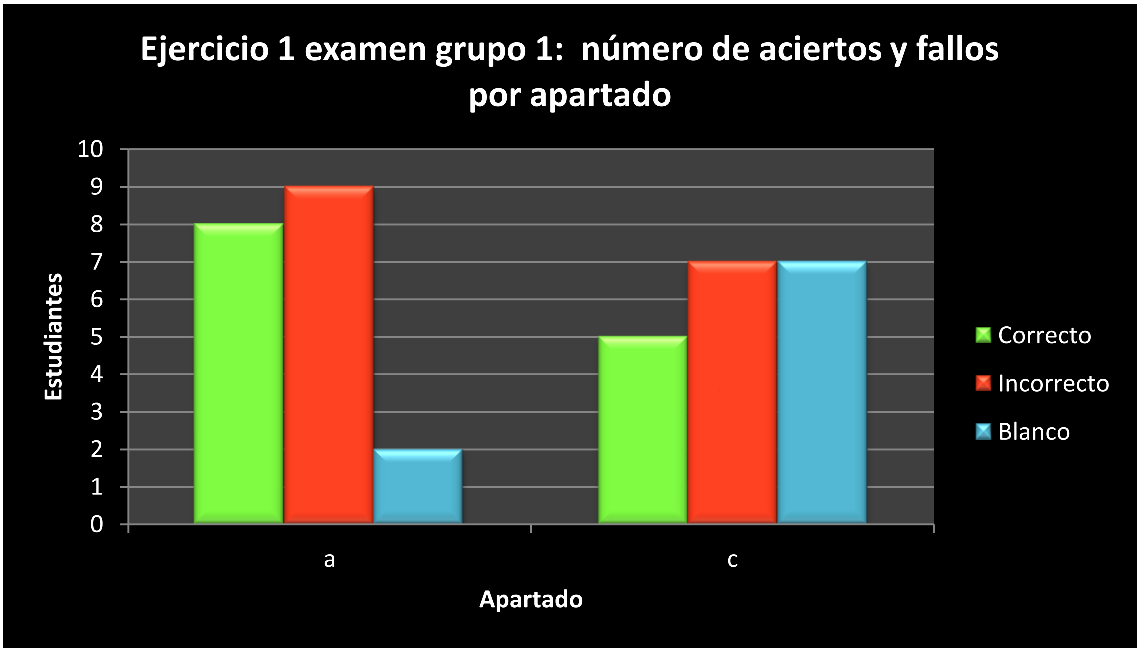


Gráfico 7. Ej. 2 examen del grupo 1. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

Tal y como se puede observar en el gráfico, los resultados de este ejercicio son un tanto insatisfactorios ya que la tasa de éxito es tan sólo de 42% para el apartado a y 26% para el c.

Los errores por apartado de este ejercicio se muestran a continuación:

Apartado a

Error	Frecuencia
No realizan límites laterales	1
Se equivoca al elegir el trozo de la función	3
Realiza los límites laterales pero no concluye	1
Error de cálculo básico $(-2^3 - 1 = 15)$	2
Trozo de función mal copiado	2

Apartado c

Error	Frecuencia
No realizan límites laterales	2
Se equivoca al elegir el trozo de la función	3
Realiza los límites laterales pero no concluye	1
Error de cálculo básico $(-2^3 - 1 = 15)$	1

En el apartado *a*, un error tipo esperado era que no realizaran límites laterales y si los realizaban, que se equivocasen al escoger el trozo correspondiente de la función a trozos. Tal y como se observa estos errores tienen lugar, pero la frecuencia no es muy elevada.

En el apartado *c*, los errores son similares y en general, a diferencia de lo que se esperaba, la ecuación es planteada correctamente.

Grupo 2

En la Ilustración 13 se muestra el primer ejercicio del examen del grupo 2.

2. Dada la siguiente función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^4 - 1 \; si \; x < -2 \\ -5x + 5 \; si \; -2 \leq x < 5 \\ x^2 + 2x + k \;\; si \; 5 < x \end{cases}$

d. (0,5 puntos) Determina si es convergente en el punto x = – 2.
e. (0,25 puntos) Determina si es continua en el punto x = - 2.
f. (0,5 puntos) Halla el valor de k para que la función f sea convergente en el punto x = 5.

Ilustración 13. Ejercicio 2 del examen del grupo 2

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 8.

Gráfico 8. Ej. 2 examen del grupo 2. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

Tal y como se puede observar en el gráfico, los resultados de este ejercicio son un tanto insatisfactorios ya que la tasa de éxito es tan sólo de 33% para el apartado a y 6% para el c.

Los errores por apartado de este ejercicio se muestran en las siguientes tablas

Apartado a

Error	Frecuencia
No realizan límites laterales	1
Se equivoca al elegir el trozo de la función	2
Realiza los límites laterales pero no concluye	1
Error de cálculo básico $(-2^3 - 1 = 15)$	3
Trozo de función mal copiado	1

Apartado c

Error	Frecuencia
No plantea correctamente la ecuación	6
Error de cálculo básico $(-2^3 - 1 = 15)$	1

En el apartado *a* el comportamiento es muy similar al del grupo 1.

En el apartado *c*, sí se confirma el error esperado ya que el 40% de los alumnos no plantean la ecuación correctamente.

8.4.3.3 Ejercicio 3

Grupo 1

En la Ilustración 14 se muestra el tercer ejercicio del examen del grupo 1.

3. (1,5 puntos) Calcula los siguientes límites:

$a.\ \lim_{x\to-\infty}(-3x^3+2x^2+150x-8)=$

$b.\ \lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}}{2x-7}=$

$c.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2}=$

$d.\ \lim_{x\to+\infty}3^{-x^3}=$

$e.\ \lim_{x\to4}\frac{-x^2}{x-4}=$

$f.\ \lim_{x\to5}\frac{3x-15}{x^2-25}=$

Ilustración 14. Ejercicio 3 del examen del grupo 1

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 9.

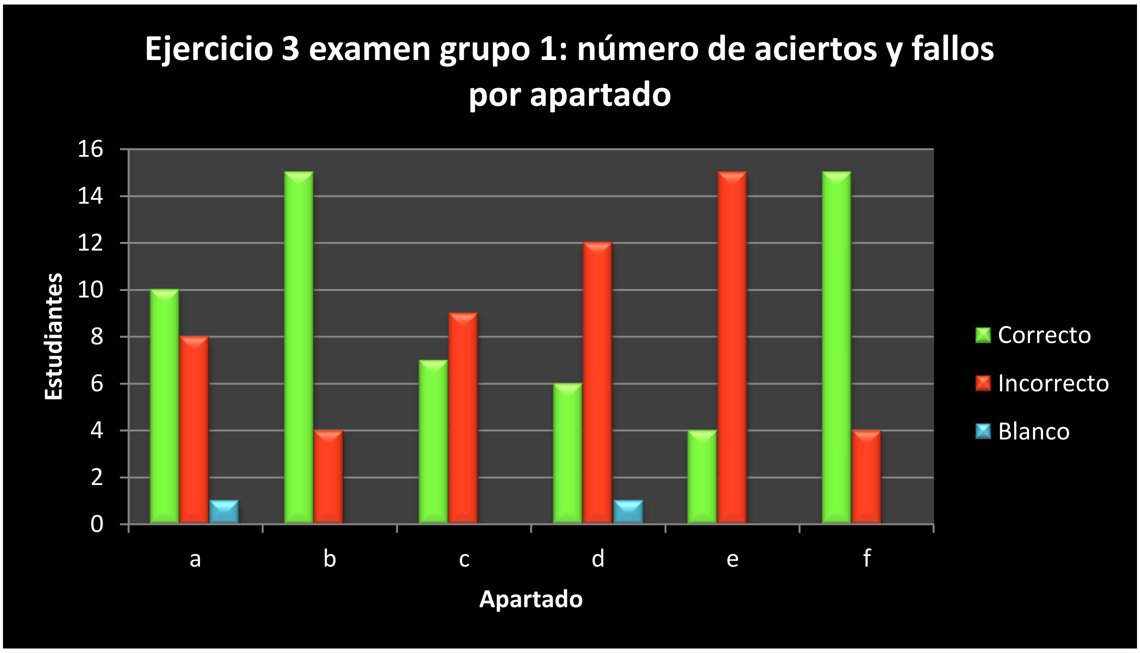


Gráfico 9. Ej. 3 examen del grupo 1. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

Tal y como se observa en el gráfico, el apartado *b* y *f* son aquellos con mayor número de respuestas correctas (79%). Les sigue el apartado *a* con un 52% y el *c* y *d* con un 37% y 32%. Por último, el ejercicio con menor número de respuestas correctas es el *e* (tan sólo el 21%).

A continuación se muestran tablas donde se recopilan los errores cometidos por los estudiantes en cada apartado.

Apartado a

Errores metodológicos			
Aplicación	Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \dots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)	Sustituye en todos los términos del polinomio	2
Errores de operatoria y álgebra			
Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($Ejemplo: -(-x)^4 = x^4$)			**6**
Errores de notación			
Se olvida en algún paso intermedio de poner “ $\lim\limits_{x\to x_0}$ ”			1
Pone “ $\lim\limits_{x\to x_0}$ ” cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función			2

En este apartado, tal y como se esperaba, la mayoría de los fallos han sido cometidos por no operar correctamente con potencias: $-3(-\infty)^3 = -\infty$.

Apartado b

Errores metodológicos		
Selección	Aplica técnica incorrecta	3
Errores de operatoria y álgebra		
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9} = 6$)		2
No utiliza paréntesis o se olvida en pasos intermedios		1

El error esperado en este apartado era que los alumnos no sustituyeran en la función para ver la naturaleza de la expresión resultante y actuaran como si se tratase de una indeterminación.

No obstante, en este apartado no se puede decir que haya un error tipo, pero tres estudiantes sí siguen la tendencia de al ver una función con un radical, multiplicar por el conjugado y no sustituir para ver si la expresión obtenida es o no indeterminación y actuar en consecuencia.

Apartado c

Errores conceptuales		
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$k^{+\infty} = +\infty, \quad 0 < k < 1$	**9**
Errores metodológicos		
Selección	No aplica regla	1
	Aplica técnica incorrecta	2

En este apartado la mayoría de los estudiantes no recuerdan que cuando la base es menor que 1, si está elevada a infinito, el resultado es infinito, tal y como se esperaba. Para este tipo de límite se les mostró el procedimiento gráfico mediante la representación de la función. No obstante, ningún estudiante ha recurrido a él.

Por otro lado, resulta también llamativo que dos estudiantes apliquen la técnica mostrada para resolver indeterminaciones de 1^{∞} sin haber comprobado que realmente tienen esa indeterminación.

Apartado d

Errores conceptuales		
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{k}{\infty} = \infty, \quad k \neq 0$	1
	$k^{-\infty} = -\infty, \quad k > 1$	11
Errores de notación		
En la resolución, no pone nunca " $\lim\limits_{x \to x_0}$ "		1

En este apartado, de las 11 personas que responden que el límite es menos infinito, ninguna ha aplicado la propiedad de las potencias por la que podían haber llegado a la expresión: $\frac{1}{3^{\infty}}$. La gran mayoría de los estudiantes que han respondido correctamente, sí que han realizado este paso intermedio. Por otro lado, resulta llamativo también que en clase se les propuso recurrir a la representación de la función y sin embargo, ninguno de ellos la ha realizado.

Apartado e

Errores conceptuales		
Confunde indeterminación con expresión determinada		2
Errores metodológicos		
Selección	Aplica técnica incorrecta	1
Errores de operatoria y álgebra		
Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($Ejemplo$: $-(-x)^4 = x^4$)		**12**
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5,* $\sqrt{9} = 6$)		2

En el apartado *e*, se preveía que hubiera fallos del tipo: $\frac{-16}{0^-} = +\infty$, ya que los estudiantes podrían no darse cuenta de que el 0^- hace que el cociente sea positivo.

Sin embargo, este error no se da y nuevamente resulta alarmante la frecuencia con la que los estudiantes cometen fallos a la hora de operar con potencias. En este caso, el 75% de los estudiantes cometen el fallo $-4^2 = 16$.

Finalmente, en el apartado *f* se espera algún error por no tener claras las igualdades notables.

Apartado f

Errores metodológicos		
Selección	Aplica técnica incorrecta	2
Errores de operatoria y álgebra		
Identidades notables ($Ejemplo$: $(x+2)^2 = x^2 + 4$)		1
Saca factor común cuando no es posible		1
Errores de notación		
En la resolución, no pone nunca " $\lim\limits_{x \to x_0}$ "		1

En este apartado no se puede hablar de erro tipo. La técnica incorrecta que aplican los estudiantes es dividir numerador y denominador por el término de mayor grado.

Grupo 2

En la Ilustración 15 se muestra el tercer ejercicio del examen del grupo 2.

3. (1,5 puntos) Calcula los siguientes límites:

$a.\ \lim_{x\to-\infty}(-2x^3+2x^2+8x)=$

$b.\ \lim_{x\to 6}\frac{4x+2}{16-\sqrt{x+3}}=$

$c.\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-7}=$

$d.\ \lim_{x\to+\infty}7^{-x^2}=$

$e.\ \lim_{x\to 7}\frac{-x^2}{x-7}=$

$f.\ \lim_{x\to 3}\frac{5x-15}{x^2-9}=$

Ilustración 15. Ejercicio 3 del examen del grupo 2

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 10.

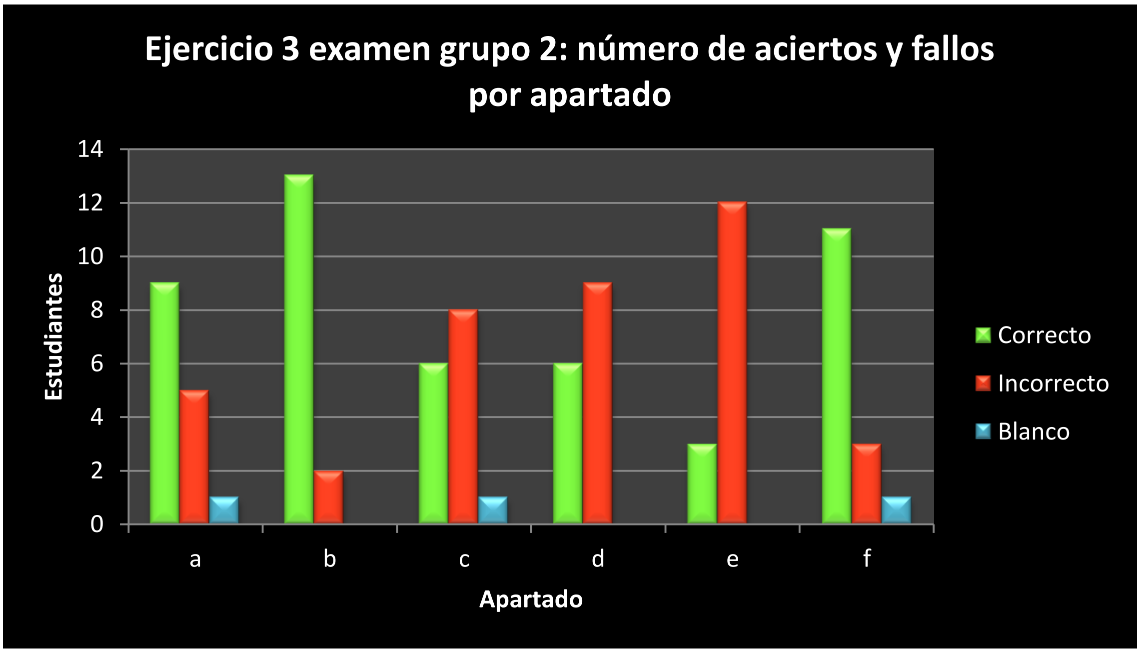


Gráfico 10. Ej. 3 examen del grupo 2. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

Tal y como se observa en el gráfico, el apartado *b* y *f* son aquellos con mayor número de respuestas correctas (87% y 73% respectivamente). Les sigue el apartado *a* con un 60% y el *c* y *d* con un 40%. Por último, el ejercicio con menor número de respuestas correctas es el *e* (tan sólo el 20%). Comparando este tercer ejercicio del examen del grupo 1 con el del 2, se observa que los apartados tienen unas tasas de éxito similares.

Apartado a

Errores conceptuales			
Confunde indeterminación con expresión determinada			2
Errores metodológicos			
Aplicación	Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)	Sustituye en todos los términos del polinomio	1
Errores de operatoria y álgebra			
Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($Ejemplo: -(-x)^4 = x^4$)			2

En este apartado, a diferencia del grupo 1, no se puede hablar de error tipo.

Apartado b

Errores metodológicos		
Selección	Aplica técnica incorrecta	2

En esta clase sólo ha habido dos fallos por seleccionar la técnica incorrecta de multiplicar por ele conjugado sin haber visto previamente si había indeterminación.

Apartado c

Errores conceptuales		
Confunde indeterminación con expresión determinada		2
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$k^{+\infty} = +\infty, \quad 0 < k < 1$	**5**
Errores metodológicos		
Selección	Aplica técnica incorrecta	1

En este apartado la tercera parte de los estudiantes no recuerdan que cuando la base es menor que 1, si está elevada a infinito, el resultado es infinito, tal y como se había predicho. Para este tipo de límite se les mostró el procedimiento gráfico mediante la representación de la función. No obstante, ningún estudiante ha recurrido a él.

Apartado d

Errores conceptuales		
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{k}{\infty} = \infty, \quad k \neq 0$	1
	$k^{-\infty} = -\infty, \quad k > 1$	4
Errores de operatoria y álgebra		
Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($Ejemplo: -(-x)^4 = x^4$)		4
Errores de notación		
En la resolución, no pone nunca “ $\lim_{x\to x_0}$ ”		1

En este apartado, casi la tercera parte de la clase se equivoca al calcular $7^{-\infty}$,y tal y como ocurría en la otra clase, ninguno ha aplicado la propiedad de las potencias por la que podían haber llegado a la expresión: $\frac{1}{7^{\infty}}$. La gran mayoría de los estudiantes que han respondido correctamente, sí que han realizado este paso intermedio. Resulta también llamativo que así como en la otra clase no hubo ningún fallo al operar con potencias, en esta clase sí. Así pues, el 27% de los estudiantes realizan, teniendo en cuenta que la x tiende a más infinito: $7^{-x^2} = 7^{\infty}$, es decir, no tienen en cuenta que el menos no está elevado al cuadrado. Por otro lado, resulta llamativo también que en clase se les propuso recurrir a la representación de la función y sin embargo, ninguno de ellos la ha realizado. Se observa también como casi la tercera parte de la clase vuelve a operar mal con potencias, haciendo $-\infty^2 = +\infty$.

Apartado e

Errores conceptuales			
Confunde indeterminación con expresión determinada			4
Errores metodológicos			
Selección	Aplica técnica incorrecta		1
Aplicación	Límites Laterales	Realiza los límites laterales pero no concluye	1
Errores de operatoria y álgebra			
Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($Ejemplo$: $-(-x)^4 = x^4$)			**6**
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9} = 6$)			3

El 40% de la clase vuelve a operar incorrectamente con potencias. En este caso, al igual que ocurría con el mismo apartado en el examen del grupo 1, el error cometido es $-7^2 = 49$. En esta clase, además el 27% confunde indeterminación con expresión determinada: $\frac{\pm 49}{0} = \pm\infty$ (el signo depende de si han cometido o no el fallo al operar con potencias).

Apartado f

Errores metodológicos		
Selección	No aplica técnica	2
	Aplica técnica incorrecta	1
Errores de notación		
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación		3

A la vista de los resultados, en este apartado no es posible hablar de error tipo.

8.4.3.4 Ejercicio 4

Grupo 1

En la Ilustración 16 se muestra el cuarto ejercicio del examen del grupo 1.

4. (5,25 puntos) Calcula los siguientes límites:

$a.\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-3}-1}{2x-4} =$

$b.\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^6}{4x^2+5} =$

$c.\ \lim_{x\to3} \frac{3x^3-18x^2+27x}{5x^2-20x+15} =$

$d.\ \lim_{x\to+\infty} \frac{-12x^2}{\sqrt{9x^4+1}+x^2} =$

$e.\ \lim_{x\to3} \frac{3x+2}{x^2-9} =$

$f.\ \lim_{x\to1} \left(\frac{x^2-1}{x-1} - \frac{x^3-1}{x^2-1}\right) =$

$g.\ \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x} - \sqrt{4x^2-3}\right) =$

Ilustración 16. Ejercicio 4 del examen del grupo 1

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 11.

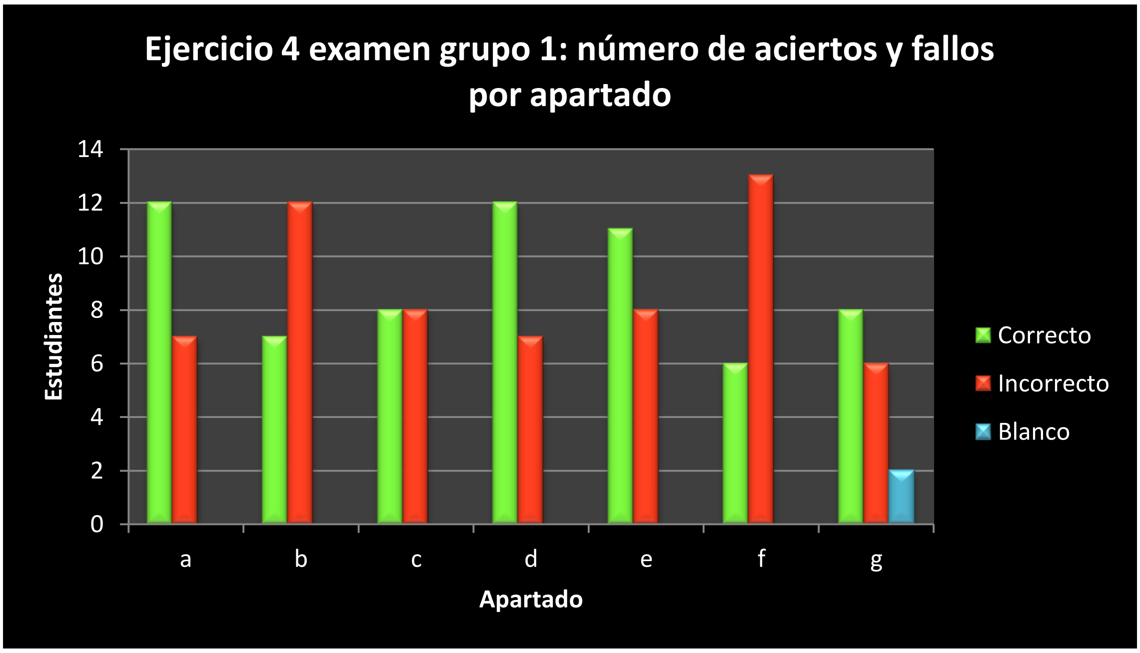


Gráfico 11. Ej. 4 examen del grupo 1. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

El apartado *a* y *b* son aquellos con mayor número de respuestas correctas (63%). Les sigue el apartado e (58%), c y g (42%) y finalmente, el apartado b y f (36% y 32% respectivamente).

A continuación se muestran unas tablas con los errores cometidos en cada apartado.

Apartado a

Errores conceptuales			
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{0}{k}=\infty, \quad k \neq 0$		1
Errores metodológicos			
Selección	Aplica técnica incorrecta		4
Aplicación	Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)	La utiliza con funciones radicales	2
Al introducir o extraer un término de una raíz			1
Simplificar términos que están sumando en $\left(Ejemplo: \frac{x^2-\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}\right)$			1
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9}=6$)			1
Al dividir una suma, no divide todos los sumandos			1
No utiliza paréntesis o se olvida en pasos intermedios			1
Errores de notación			
En la resolución, no pone nunca “ $\lim_{x\to x_0}$ ”			1
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación			9

En este ejercicio, el error cometido con mayor frecuencia ha sido aplicar la técnica incorrecta. De los 4 estudiantes, 3 han multiplicado por el conjugado sin tener en cuenta el tipo de indeterminación obtenida. En este caso, el error esperado únicamente es cometido por un estudiante.

Apartado b

Errores conceptuales			
Confunde expresión determinada con indeterminación			1
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{k}{0}=p, \quad k,p \neq 0$		**5**
Errores metodológicos			
Aplicación	Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)	Sustituye en todos los términos del polinomio	2
Procedimentales	Aplica la técnica correctamente pero no llega hasta el final		3
Errores de operatoria y álgebra			
Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($Ejemplo: -(-x)^4 = x^4$)			3
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9}=6$)			2
Error al simplificar $\frac{x^3}{x^3}=x$			1
Errores de notación			
En la resolución, no pone nunca “ $\lim_{x\to x_0}$ ”			2
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación			3

En este apartado, se esperaba que los alumnos aplicaran correctamente la técnica de dividir por el mayor grado, pero que tuvieran dificultades a la hora de determinar el valor de $\frac{k}{0}$. Tal y como se observa en la tabla, este error no tiene lugar. Ahora bien, en este ejercicio hay una variedad amplia de errores y aproximadamente el 25% de la clase continua confundiendo el valor de algunas expresiones determinadas.

Apartado c

<table>
<tr><th colspan="3">Errores conceptuales</th></tr>
<tr><td>Confunde el valor de las expresiones determinadas</td><td>$\frac{0}{k} = \infty, \quad k \neq 0$</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores de operatoria y álgebra</th></tr>
<tr><td colspan="2">Despistes (al sustituir, copiar, etc)</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Error de cálculo básico (Ejemplo: 2+4=5, $\sqrt{9} = 6$)</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">A la hora de factorizar, si la raíz es doble, se olvida de contarla dos veces</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Saca un número factor común en una ecuación y una vez factorizada, se olvida de ponerlo multiplicando</td><td>3</td></tr>
<tr><th colspan="3">Errores de notación</th></tr>
<tr><td colspan="2">En la resolución, no pone nunca “ $\lim_{x \to x_0}$ ”</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">No pone que la expresión obtenida es una indeterminación</td><td>2</td></tr>
</table>

En este apartado, destacan los errores de operatoria y álgebra (especialmente errores de no cambiar el signo a las raíces al factorizar o de olvidarse los factores comunes extraídos, tal y como se esperaba), si bien no hay ninguno que destaque sobre los demás.

Apartado d

<table>
<tr><th colspan="4">Errores metodológicos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Selección</td><td colspan="2">No aplica técnica</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aplica técnica incorrecta</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aplicación</td><td rowspan="2">Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)</td><td>Sustituye en todos los términos del polinomio</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Divide algunos términos por la x acompañada de su coeficiente</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores de operatoria y álgebra</th></tr>
<tr><td colspan="3">Despiste (al sustituir, copiar, etc)</td><td>3</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores de notación</th></tr>
<tr><td colspan="3">En la resolución, no pone nunca “ $\lim_{x \to x_0}$ ”</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">No pone que la expresión obtenida es una indeterminación</td><td>8</td></tr>
</table>

En el apartado *d* se esperaba que tuvieran problemas para aplicar la técnica de dividir por el término de mayor grado, sin embargo no ha sido así. De hecho en este ejercicio, no hay error tipo, únicamente se repite de forma considerable la falta de notación en cuanto a que no ponen que la expresión obtenida es una indeterminación.

Apartado e

Errores conceptuales			
Se equivoca con el tipo de indeterminación			1
Confunde indeterminación con expresión determinada			1
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{k}{0^-} = +\infty, \quad k \neq 0$		2
Errores metodológicos			
Selección	Aplica la técnica incorrecta		1
Aplicación	Límites laterales	Sólo plantea un límite lateral	1
		Realiza los límites laterales pero no concluye	1
Errores de operatoria y álgebra			
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9} = 6$)			2
Errores de notación			
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación			4

En este ejercicio tampoco hay un error que por frecuencia, destaque sobre los demás, de manera que tampoco es posible extraer un error tipo, a excepción de la falta en la notación. A diferencia de lo esperado, por lo general reconocen la indeterminación y realizan límites laterales.

Apartado f

Errores conceptuales	
Se equivoca con el tipo de indeterminación	1
Errores de operatoria y álgebra	
Despistes (al sustituir, copiar, etc)	1
Identidades notables ($Ejemplo$: $(x-2)(x+2) = x^2 + 4$)	4
Simplificar términos que están sumando en $\left(Ejemplo: \frac{x^2-\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}\right)$	2
No calcula correctamente el mínimo común múltiplo	1
Opera mal con el mínimo común múltiplo $\left(Ejemplo: \frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x+3} = \frac{6(x+3)-1(x-3)}{x^2-9}\right)$	3
Signo menos multiplicando a un paréntesis con dos términos, se olvidan de multiplicar el signo por el segundo término	1
Errores de notación	
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación	2
Pone "$\lim_{x \to x_0}$" cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función	1

En este apartado se espera como posible fallo que los alumnos no realicen bien el mínimo común múltiplo y además que no operen bien con él. Por otro lado, también se prevé que el menos que afecta al segundo cociente no lo tengan en cuenta. Tal y como se observa en la tabla, estos errores previsibles se confirman pero además aparecen errores de operatoria que no eran esperados. De hecho, es posible apreciar que los errores en operatoria y álgebra son muy numerosos: de las 13 respuestas incorrectas, 12 son por fallos de este tipo.

Apartado g

Errores conceptuales			
Confunde indeterminación con expresión determinada			2
Errores metodológicos			
Selección	Aplica técnica incorrecta (dividir)		1
Aplicación	Multiplicar por el conjugado	Sólo multiplica el numerador o denominador	1
Procedimentales-desarrollo	Resuelve indeterminación y no continúa o se equivoca en pasos posteriores		2
Errores de operatoria y álgebra			
Despiste (al sustituir, etc)			2
Signo menos multiplicando a un paréntesis con dos términos, se olvidan de multiplicar el signo por el segundo término			1
Errores de notación			
Se olvida en algún paso intermedio de poner “ $\lim_{x \to x_0}$ ”			2
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación			4

En este ejercicio tampoco es posible concluir que existe un error tipo en el desarrollo, ya que no hay muchos errores y no se repiten con mucha frecuencia.

Grupo 2

En la Ilustración 17se muestra el cuarto ejercicio del examen del grupo 2.

4. (5,25 puntos) Calcula los siguientes límites:

$a.\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{10x-4} =$

$b.\ \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^6}{4x^2+5} =$

$c.\ \lim_{x \to -3} \frac{2x^3+12x^2+18x}{5x^2+5x-30} =$

$d.\ \lim_{x \to +\infty} \frac{-18x^2}{\sqrt{25x^4+1}+x^2} =$

$e.\ \lim_{x \to 2} \frac{7x+5}{x^2-4} =$

$f.\ \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2} - \frac{x^3+x^2-2x-8}{x^2-4} \right) =$

$g.\ \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{16x^2+2x}-\sqrt{16x^2-3}} =$

Ilustración 17. Ejercicio 4 del examen del grupo 2

El número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco, por apartado se muestran en el Gráfico 12.

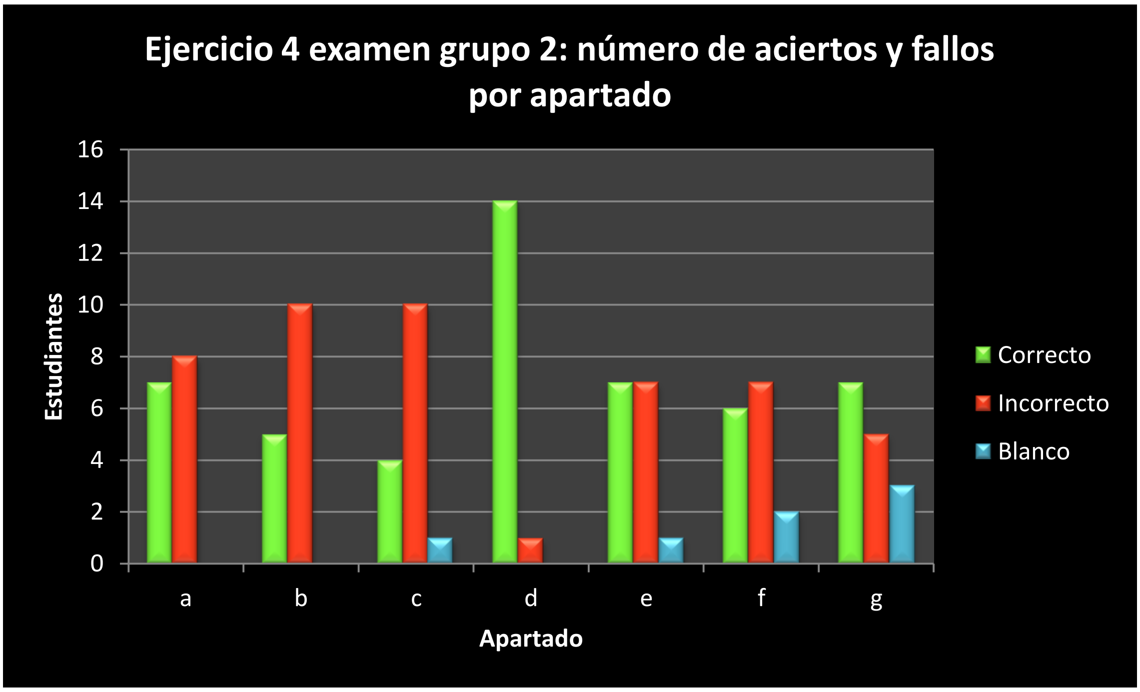


Gráfico 12. Ej. 4 examen del grupo 2. Número de respuestas correctas, incorrectas y en blanco por apartado.

El apartado *d* ha sido resuelto correctamente por la inmensa mayoría de los estudiantes (el 93% de las respuestas son correctas). Les siguen los apartados *a*, *e* y *g* (47%), el *f* (40%), *b* (33%) y *c* (26%).

A continuación, se muestran las tablas con los errores cometidos en cada apartado.

Apartado a

Errores conceptuales			
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{0}{k} = k, \quad k \neq 0$		1
	$\frac{k}{\infty} = k, \quad k \neq 0$		3
Errores metodológicos			
Selección	Aplica técnica incorrecta (conjugado)		2
Aplicación	Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)	Sustituye en todos los términos del polinomio	1
Procedimentales-desarrollo	Aplica técnica correctamente pero no llega hasta el final		2
Errores de operatoria y álgebra			
Dividir todos los factores en un producto $\left(Ejemplo\colon \frac{x^2(x+3)}{x+1} = \frac{\frac{x^2}{x^2}(\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2})}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} \right)$			1
No realiza la distributiva (se olvida del segundo sumando)			1
No utiliza paréntesis o se olvida en pasos intermedios			1
Errores de notación			
En la resolución, no pone nunca “ $\lim_{x\to x_0}$ ”			1
Se olvida en algún paso intermedio de poner “ $\lim_{x\to x_0}$ ”			1
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación			5

En este apartado no hay un error tipo que destaque sobre el resto.

Apartado b

Errores conceptuales			
Confunde expresión determinada con indeterminación			4
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{k}{0} = p, \quad k, p \neq 0$		2
Errores metodológicos			
Selección	No aplica técnica		1
	Aplica técnica incorrecta		3
Aplicación	Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)	Sustituye en todos los términos del polinomio	1
Errores de operatoria y álgebra			
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9} = 6$)			1
Errores de notación			
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación			6

En este apartado, predominan los errores conceptuales y de tipo metodológico. El 27% de los estudiantes contestan que $\frac{3}{0} = indet$. De hecho, dos estudiantes realizan incluso límites laterales.

Apartado c

Errores conceptuales		
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{0}{k} = k, \quad k \neq 0$	1
Errores de operatoria y álgebra		
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9} = 6$)		**5**
Saca factor común incorrectamente (se olvida de un sumando)		1
Saca un número factor común en una ecuación y una vez factorizada, se olvida de ponerlo		2
Errores de notación		
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación		1

En este apartado, el error predominante es de cálculo básico. Algunos estudiantes se equivocan al realizar cálculos muy sencillos, a veces por despiste. No obstante, el peso de los errores de operatoria en este caso son los de mayor peso (el 80% de las respuestas incorrectas se deben a este tipo de error).

Apartado d

Errores metodológicos			
Aplicación	Dividir por el de mayor grado	Elige mal el grado	1
Errores de notación			
Se olvida en algún paso intermedio de poner “ $\lim_{x \to x_0}$ ”			1
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación			10

En este apartado sólo ha habido una respuesta incorrecta. No obstante, destacan los errores de notación, concretamente, la falta de indicar que la expresión obtenida es una indeterminación.

Apartado e

Errores conceptuales		
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{k}{0^-} = +\infty, \quad k \neq 0$	4
Errores metodológicos		
Selección	Aplica técnica incorrecta	1
Aplicación	Sólo plantea un límite lateral	1
Errores de operatoria y álgebra		
Error de cálculo básico (2+4=5, $\sqrt{9} = 6$)		2
Errores de notación		
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación		1

En este ejercicio, destacan los errores en cuanto al reconocimiento de las expresiones determinadas y de su valor (este fallo corresponde al 57% de las respuestas incorrectas).

Apartado f

Errores de operatoria y álgebra	
Identidades notables ($Ejemplo$: $(x-2)(x+2) = x^2 + 4$)	1
No calcula correctamente el mínimo común múltiplo	1
Opera mal con el mínimo común múltiplo ($Ejemplo$: $\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x+3} = \frac{6(x+3)-1(x-3)}{x^2-9}$)	1
No realiza mínimo común múltiplo sino que resta los numeradores y pone el resultado como numerador y resta los denominadores y pone el resultado como denominador	1
Errores de notación	
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación	4

En este apartado no hay ningún error tipo según estos datos.

Apartado g

<table>
<tr><th colspan="4">Errores conceptuales</th></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde indeterminación con expresión determinada</td><td>4</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores metodológicos</th></tr>
<tr><td>Selección</td><td colspan="2">Aplica técnica incorrecta (dividir)</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Aplicación</td><td>Dividir por el de mayor grado</td><td>Sólo divide el numerador o denominador</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores de operatoria y álgebra</th></tr>
<tr><td colspan="3">Despiste (al sustituir, copiar, etc)</td><td>1</td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores de notación</th></tr>
<tr><td colspan="3">No pone que la expresión obtenida es una indeterminación</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Pone “ $\lim\limits_{x \to x_0}$ ” cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función</td><td>1</td></tr>
</table>

En este apartado destacan los errores de tipo conceptual, concretamente el 80% de las respuestas incorrectas se deben a confundir una indeterminación con una expresión determinada (0/0=0). No obstante, dos de estos cuatro estudiantes continúan aplicando la técnica de dividir el numerador y denominador por el término de mayor grado.

8.5 Discusión de los resultados

Desde el punto de vista del cálculo de límites a partir de la gráfica de la función, cabe decir que las mayores dificultades en la evaluación inicial y en menor medida, en la prueba de examen, se presentaban cuando los estudiantes tenían que hacer frente al cálculo del límite de la función en un punto, donde por tanto, debían hallar los límites laterales. Los errores más comunes fueron los siguientes:

- En vez calcular un límite lateral de una función en un punto aproximándose a la imagen de dicho punto por el lado que corresponde, lo que hacen es *desplazarse* sobre la función hacia este lado pero alejándose, viendo *hacia dónde se dirige* la función. Tal y como se indicó en el apartado de resultados, puede deberse a una mala comprensión de los estudiantes del concepto de tendencia lateral en un punto. Por otro lado, puede ser también debido a que en temas anteriores los estudiantes han sido acostumbrados a hallar las tendencias de las funciones bien cuando la *x* tiende a más o menos infinito o bien en puntos donde la función presenta asíntotas verticales u horizontales. Están habituados por tanto a *desplazarse sobre* las ramas o asíntotas de la función para averiguar hacia dónde *se dirige* (normalmente límites infinitos) y por consiguiente, en estos casos, siguen el mismo procedimiento.
- Se equivocan al calcular los límites laterales, confunden derecha e izquierda.
- No calculan los límites laterales, de hecho, en los casos donde no existe límite no identifican la necesidad de estudiarlos: hallan únicamente un límite lateral sin percatarse de que los límites laterales son distintos o de que el otro no

existe y concluyen que el valor del límite lateral hallado es el límite de la función en el punto considerado.

Además de los errores propios del cálculo de los límites laterales, los estudiantes también cometieron en la evaluación inicial y prueba de examen estos errores:

- Confundir el eje *x* con el eje *y*.
- Confundir convenios de signo del eje *y* con el eje *x*. Por lo general están acostumbrados a utilizar el criterio de lo que está a la derecha del eje *y* es positivo y lo que está a la izquierda negativo y es posible que utilicen este criterio a la hora de determinar el valor del límite.

Tras la evaluación inicial y la prueba de examen, se dedicó un tiempo de clase a explicar y aclarar los errores indicados. Tras estas revisiones, la cantidad de estos errores en el examen ha sido considerablemente menor, ya que por un lado los errores en el cálculo de límites laterales han disminuido y, por otro lado, confunden menos los ejes y los convenios de signos (a pesar de que estos errores no han sido eliminados del todo). No obstante, en este sentido, es necesario realizar dos puntualizaciones. Así pues, si bien los errores en el cálculo de límites laterales han disminuido, no es posible valorar a través del examen si los alumnos entienden y son conscientes de la necesidad de calcular los límites laterales. La razón es que en el examen únicamente se han preguntado límites laterales y no hay ningún ejercicio del estilo al apartado 5, 6 o 7 de la prueba de examen donde se pregunte el límite de la función en un punto. La segunda puntualización es que en el examen se ha advertido que los estudiantes tienen dificultades a la hora de determinar la imagen de la función en un punto, especialmente cuando hay un salto de discontinuidad evitable. Si bien este era un error esperado, no era previsible que el porcentaje de fallos en un ejercicio de estas características fuera tan elevado.

Queda patente por tanto, a través de los resultados de las pruebas, que las dificultades de los estudiantes a la hora de comprender el concepto de límite son significativas y que perduran en el tiempo (en el examen se siguen cometiendo errores ya detectados en la evaluación inicial). Con el objetivo de facilitar el aprendizaje y superar estas dificultades en parte ya previstas, se llevó a cabo la explicación del concepto de límite a partir de técnicas interactivas (uso de GeoGebra), ahora bien, valorar la contribución de esta explicación en el aprendizaje no es evidente. Así pues, no se tienen datos de cómo hubieran sido los resultados del examen y de la prueba de examen de haber procedido con otro tipo de explicación más tradicional en pizarra. Por otro lado, debido a la falta de tiempo, tan sólo se pudo realizar una sesión con este programa lo que impidió la utilización de esta técnica de enseñanza en las condiciones más idóneas. No obstante, sí se puede valorar la opinión que merece a los estudiantes este tipo de sesiones en relación con su aprendizaje.

Los resultados obtenidos en las preguntas de las encuestas realizadas relacionadas con la metodología (preguntas 2, 3 y 4) fueron los siguientes:

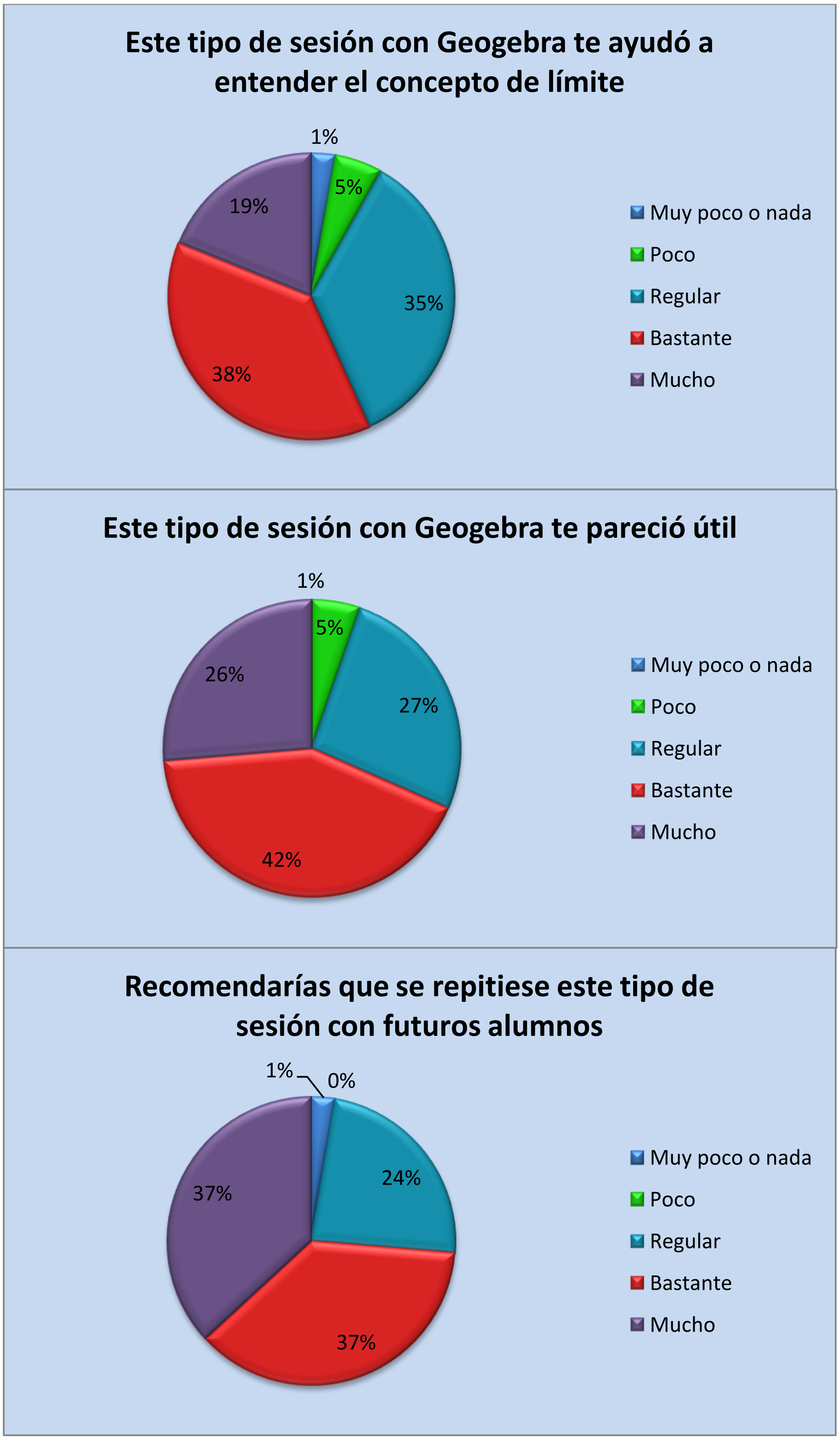


Gráfico 13. Valoración de la metodología (uso de GeoGebra). Respuestas a las preguntas 2, 3 y 4.

Tal y como se observa en el Gráfico 13, tres cuartas partes de la clase recomendaría la sesión con GeoGebra a futuros cursos. El 68% consideró que la sesión fue útil, aunque tan sólo el 57% considera que le ayudó a comprender el concepto de límite.

A partir de estos datos se puede concluir que en general la sesión les gustó, que ayudó a la mitad de los estudiantes, al menos según su propia opinión, a entender el concepto de límite y que casi al 70% de los estudiantes les pareció una sesión útil. Estos resultados tienden a reforzar la hipótesis de que este tipo de técnicas son adecuadas y valoradas positivamente por los estudiantes en cuanto a su utilidad para su aprendizaje, pero han de ser tratados con cautela. Así pues, estos resultados pueden estar sesgados por el interés o predisposición de los estudiantes a la realización de actividades que les saquen de su rutina diaria y de las clases convencionales.

En relación al cálculo de límites a través de la expresión analítica de la función, cabe decir que los errores esperados tanto en el cuestionario como en el estudio preliminar han sido, en su mayoría, cometidos por los estudiantes, tal y como se ha ido analizando apartado por apartado en el capítulo de resultados, aunque también ha habido alguna sorpresa tal y como se ha ido comentando. Gracias a este análisis pormenorizado es posible extraer ideas y comportamientos de los estudiantes de carácter general así como la evolución de los errores de cada tipo cometidos a lo largo de las diferentes fases del proceso de estudio.

En este sentido, resulta especialmente significativo como los errores de notación y metodológicos son drásticamente reducidos tras el proceso de estudio autónomo realizado por los estudiantes, tal y como se aprecia en el Gráfico 14. Así pues, los errores debidos a la selección, correcta aplicación y desarrollo del método de resolución de límites son disminuidos en el examen en un 30% respecto a la prueba de examen y los de notación casi en un 40%.

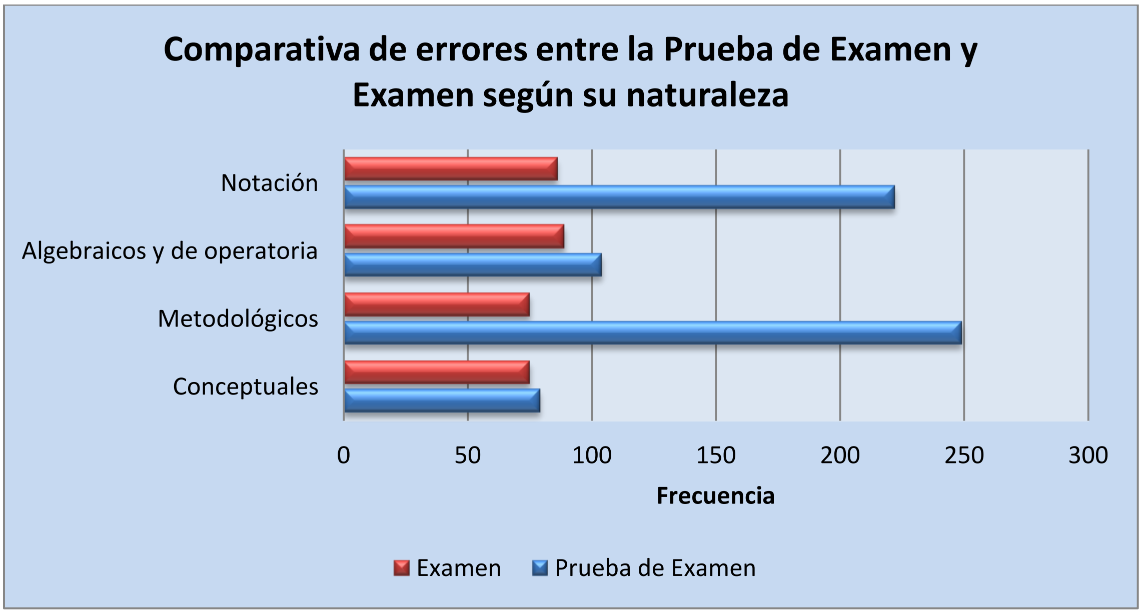


Gráfico 14. Comparativa de errores de cada tipo entre los cometidos en la prueba de examen y el examen.

Con los errores algebraicos y de operatoria y con los errores conceptuales no ocurre lo mismo, de hecho se mantienen relativamente constantes en las dos pruebas. Este dato es muy significativo, ya que muestra que a pesar de la corrección de la prueba de examen y la posterior fase de estudio, estos errores persisten.

Con respecto a los errores de operatoria y algebraicos, cabe decir que en su mayoría se trata de errores de base, que van arrastrando de cursos anteriores, y que a pesar de la gravedad de muchos de ellos, se observa que los estudiantes no intentan subsanarlos en la fase de estudio. Probablemente se centran en estudiar el tema que les ocupa, sin tener en cuenta su relación con otros temas estudiados con anterioridad. Quizás la disposición aislada o incluso atomizada de algunos de estos temas provoca que en unidades didácticas como la de límites, en la cual es necesario relacionar una gran cantidad contenidos matemáticos, las dificultades de los estudiantes para la interrelación de los mismos se hagan más patentes.

En cuanto a los errores conceptuales, es conveniente resaltar que el hecho de que perduren en el tiempo, denota una clara dificultad a la hora de entender los conceptos claves del tema y también una falta de estudio en profundidad del mismo.

Al hilo de esta discusión, resulta interesante recurrir al conocimiento sobre las técnicas de estudio más utilizadas por los estudiantes. Así pues, tal y como se observa en el Gráfico 15, los estudiantes revelan en la encuesta que principalmente utilizan dos herramientas de estudio, basadas en el repaso de lo que no entienden hasta llegar a hacerlo y en repetir una y otra vez los ejercicios de clase.

Resulta muy interesante que los estudiantes admitan que una de las maneras de estudiar matemáticas sea repetir insistentemente los ejercicios de clase. Esto explica que los errores metodológicos y de notación se hayan reducido de forma tan significativa pero que los errores conceptuales, y especialmente los de operatoria, persistan. Así pues, es muy probable que a pesar de que los estudiantes también contesten que vuelven a repasar lo que no entienden hasta entenderlo, este repaso no consista en un estudio en profundidad del tema donde además interrelacionen contenidos, sino que en su lugar, se trate de en un repaso de los ejercicios hasta que consiguen realizarlos correctamente, muchas veces por haberse aprendido inconscientemente los pasos de memoria y, por tanto, sin llegar a entenderlos realmente.

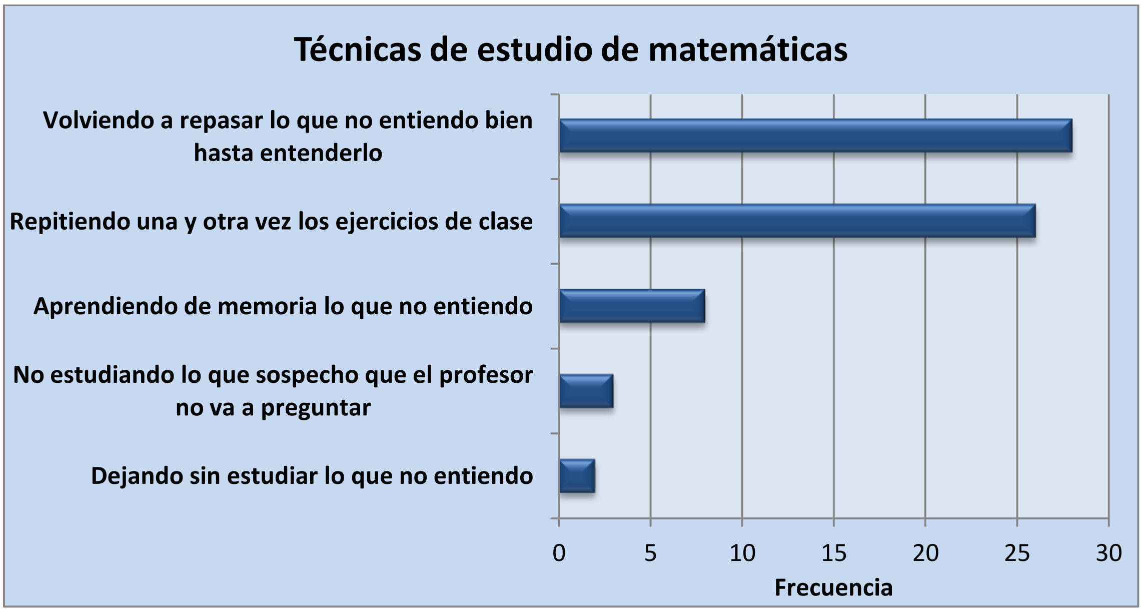


Gráfico 15. Técnicas de estudio de matemáticas utilizadas por los estudiantes.

Una vez analizada la evolución de los errores de forma general, se va a proceder al estudio particular de cada tipo: conceptuales, metodológicos, algebraicos y operatoria y de notación

En lo que respecta a los errores conceptuales, la tabla con las frecuencias de los errores en la prueba de examen (PE), examen (E) y en total, se muestra a continuación.

Errores conceptuales		**PE**	**E**	**Total**
Se equivoca con el tipo de indeterminación		6	2	8
Confunde expresión determinada con indeterminación		**13**	**5**	**18**
Confunde indeterminación con expresión determinada		**35**	**17**	**52**
Confunde el valor de las expresiones determinadas	$\frac{0}{k} = \infty, \quad k \neq 0$	4	2	6
	$\frac{k}{\infty} = \infty, \quad k \neq 0$	7	2	9
	$\frac{k}{0} = p, \quad k, p \neq 0$	5	8	13
	$k^{+\infty} = +\infty, \quad 0 < k < 1$	0	14	14
	$k^{-\infty} = -\infty, \quad k > 1$	0	15	15
	$\frac{k}{0^-} = +\infty, \quad k \neq 0$	0	6	6
	$\frac{k}{\infty} = k, \quad k \neq 0$	0	3	3
	$\frac{0}{k} = k, \quad k \neq 0$	0	1	1
	$log0 = 0, log0 = 10, log0 = 1,$ $log0 = \infty$	9	0	9
TOTAL		**79**	**75**	**154**

Tabla 1. Errores conceptuales. Frecuencias en la prueba de examen, examen y en total.

Analizando estos datos, es posible observar como en general sí que ha habido una mejora en el examen en cuanto a que ya tienen más claro cuáles son expresiones determinadas y cuáles no, pero observando el Gráfico 16, queda patente que aún no tienen confianza suficiente en el manejo de las expresiones determinadas. La razón puede ser que hay una amplia variedad de estas expresiones, que no sólo no se repiten de forma continuada en los ejercicios sino que además algunas de estas no aparecen en los ejercicios realizados en clase. Por tanto, en este casos no sería suficiente la repetición de los ejercicios en clase sino su compresión y estudio en profundidad.

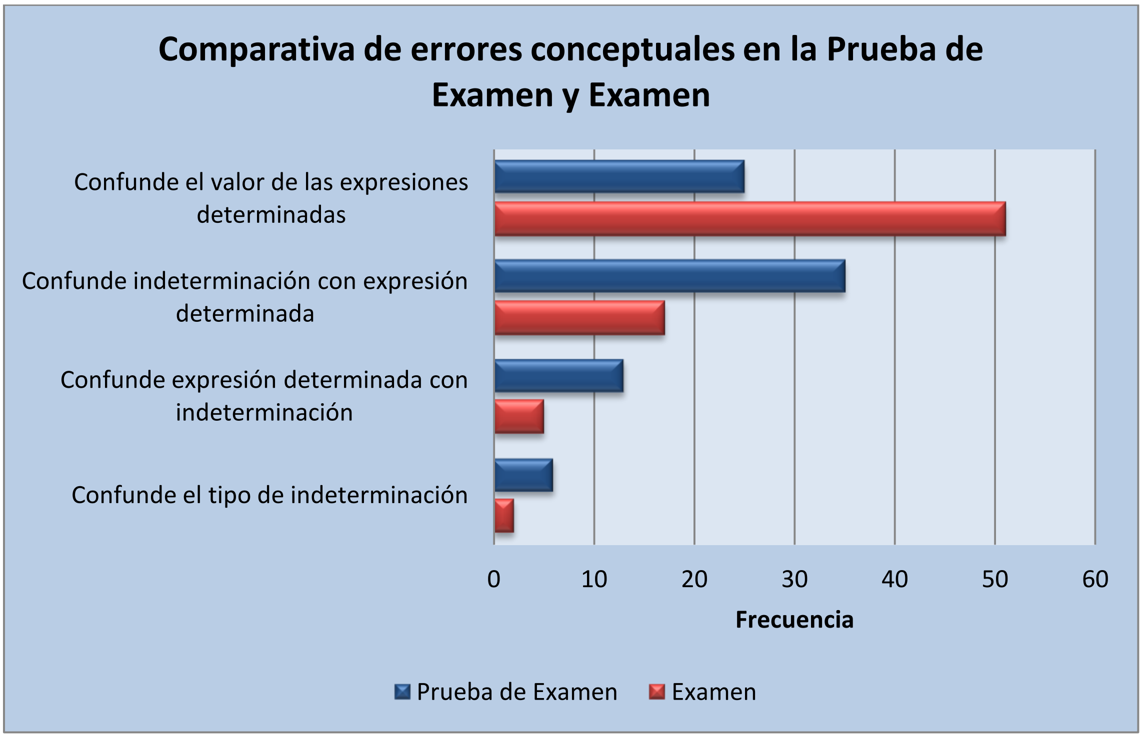


Gráfico 16. Comparativa de errores conceptuales en la prueba de examen y examen

En lo que respecta a los errores metodológicos, en la Tabla 2 se muestran las frecuencias de estos errores en la prueba de examen (PE), examen (E) y en total.

Errores metodológicos			**PE**	**E**	**Total**
Selección	**No aplica técnica**		**18**	**10**	**28**
	Aplica técnica incorrecta		**50**	**29**	**79**
Aplicación	Límites laterales	Si es $\lim_{x\to x_0}$, hacen $x \to 0^{+/-}$ en vez de $x \to {x_0}^{+/-}$	1	0	1
		No estudia límites laterales (función a trozos)	**28**	**2**	**30**
		Selecciona mal el trozo (función a trozos)	7	8	15
		Realiza los límites laterales pero no concluye	5	5	10
	Multiplicar por el conjugado	Sólo multiplica el num. o denominador	5	1	6
		Calcula mal el conjugado	2	0	2
		Aplica la propiedad distributiva al conjugado y no continúa	1	0	1
		El signo del conjugado es distinto en el numerador y denominador	1	0	1
	Dividir por el de mayor grado	Elige mal el grado	5	1	6
		Divide el numerador con diferente exponente que el denominador	7	0	7
		Divide lo que hay en el interior de la raíz con diferente exponente	4	0	4
		Sólo divide el numerador o denominador	12	1	13
		Divide sólo algunos términos por la x elevada al mayor exponente pero acompañada de su coeficiente	1	1	2
	Regla II ($\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$)	**Sustituye en todos los términos del polinomio**	**76**	**8**	**84**
		La utiliza con funciones radicales	5	2	7
	Factorizar	Intenta factorizar una raíz	1	0	1
Procedimentales-desarrollo	Aplica técnica correcta pero ante resultado no satisfactorio u otra indeterminación, aplica técnica incorrecta		9	0	9
	Resuelve indeterminación y no continúa o se equivoca en pasos posteriores		8	2	10
	No realiza el último paso por no saber a qué equivale la expresión hallada		3	5	8
TOTAL			**249**	**75**	**324**

Tabla 2. Errores metodológicos. Frecuencias en la prueba de examen, examen y en total.

Estos errores metodológicos se han dividido en tres grupos, de selección, aplicación y procedimental-desarrollo. Tal y como se observa en el Gráfico 17, los errores de estas tres sub-categorías han sido considerablemente reducidos en el examen: se observa que tras la fase de estudio, los alumnos reconocen las indeterminaciones, saben qué técnica tienen que aplicar y ya saben cómo hacerlo. Además, ya no les resulta extraño que deban enfrentarse a más de una indeterminación en un ejercicio, de manera que se atascan menos y suelen llegar hasta el final del ejercicio.

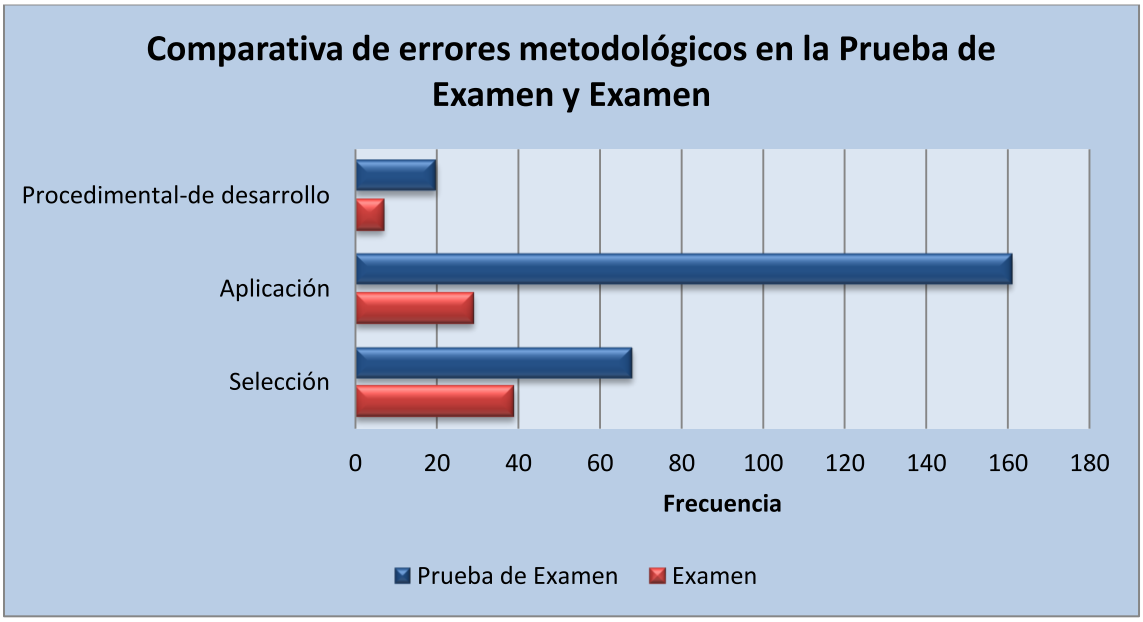


Gráfico 17. Comparativa de errores metodológicos en la prueba de examen y examen.

Resulta interesante conocer qué técnicas son las que suponen mayores retos o dificultades a los estudiantes. Así pues, una de las sorpresas encontradas es que les resulta difícil o al menos, incómoda, la aplicación de la Regla II para hallar el límite en el infinito de una función polinómica. Una regla que a priori parece simple, generó muchas dificultades en la prueba de examen, tal y como se observa en el Gráfico 18, ya que los estudiantes sustituían en todos los términos del polinomio. En el examen este error que provocaba el cálculo incorrecto de los límites en el infinito de polinomios e impedía la correcta identificación de indeterminaciones, se redujo en un 86%.

La realización de los límites laterales también es algo que les cuesta bastante, no sólo desde el punto de vista gráfico, sino también analítico. Así pues, en el examen fue el error de aplicación más frecuente, a pesar de haber sido considerablemente disminuido con respecto a la prueba de examen (concretamente, en un 88%).

La aplicación del resto de técnicas para la resolución de indeterminaciones no genera mayor complicación y los errores cometidos tienen frecuencias bajas.

Por otro lado, conviene resaltar que al contrario de lo esperado, tan sólo dos estudiantes en la prueba de examen recurrieron a procedimientos gráficos para la resolución de límites sencillos. Es por tanto llamativo, que a pesar de haber mostrado en clase los dos métodos de resolución y de haber insistido en la representación gráfica de las funciones más elementales que además aparecían en los apuntes (Anexo C), los alumnos tiendan a ignorar los métodos gráficos. Posiblemente, este comportamiento esté apoyado en la falta de costumbre y confianza en el uso de procedimientos gráficos.

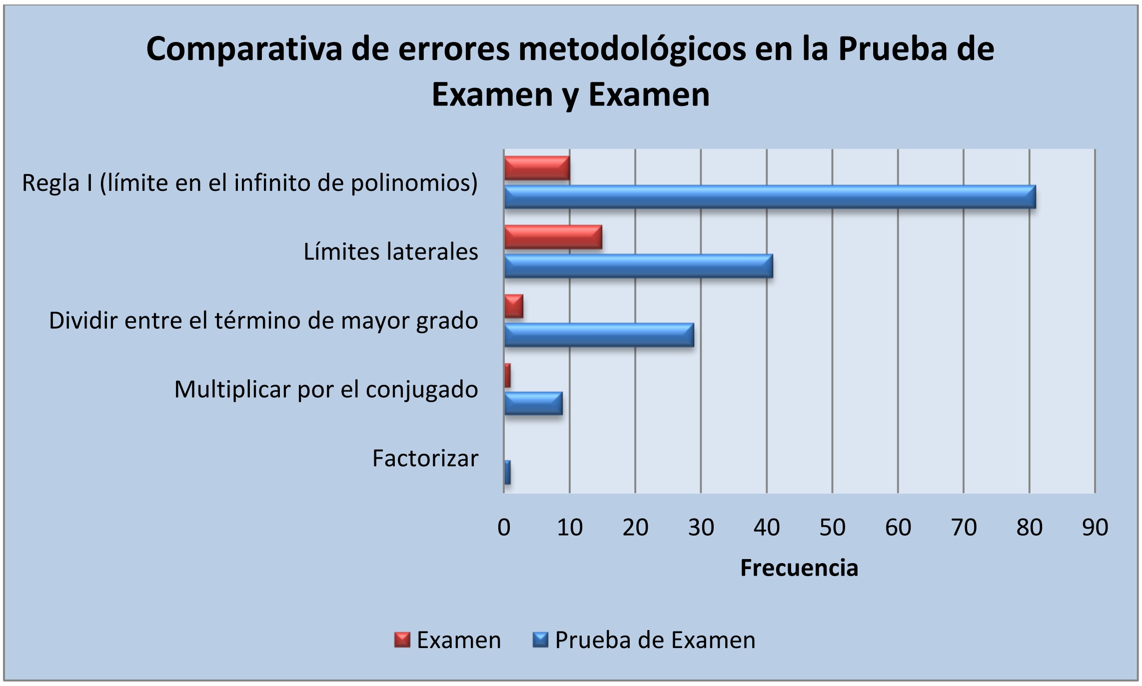


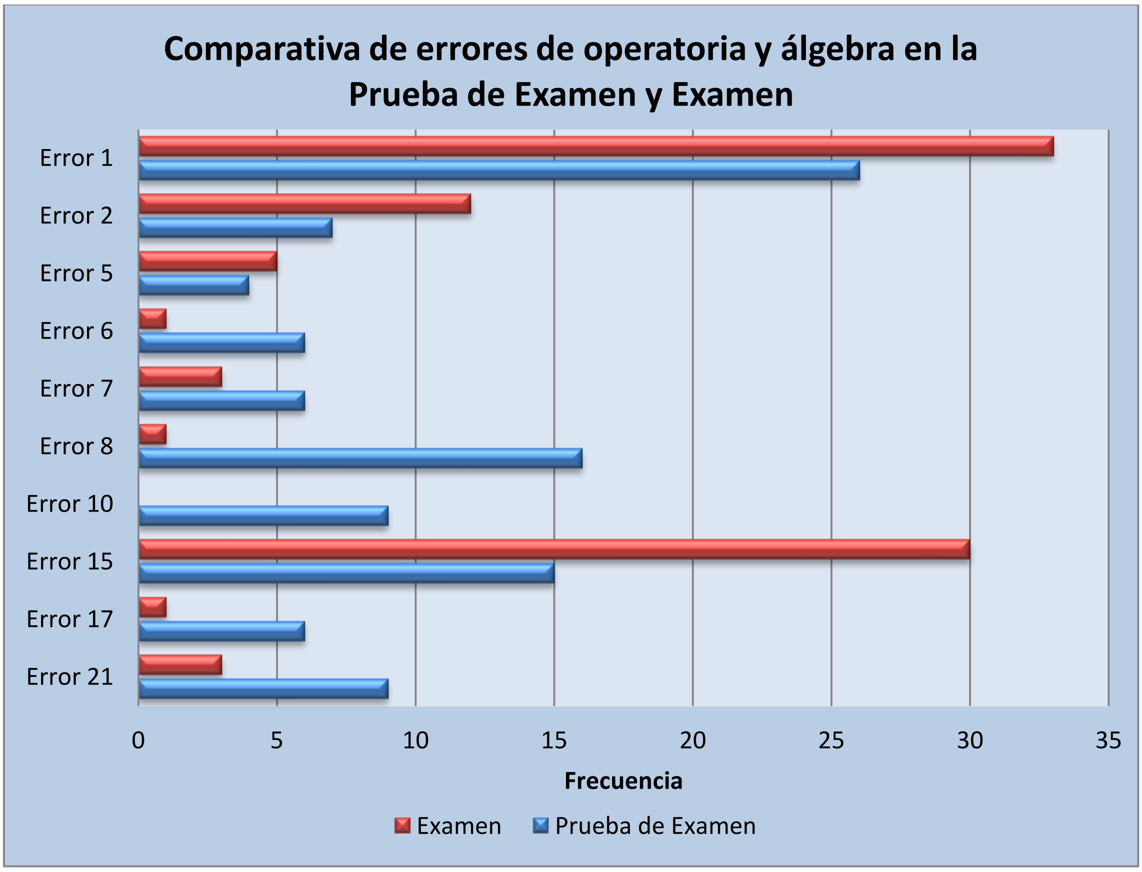
Gráfico 18. Comparativa de errores metodológicos en la prueba de examen y examen.

En relación a los errores de operatoria y álgebra, la Tabla 3 muestra las frecuencias de estos errores en la prueba de examen (PE), examen (E) y en total.

Tal y como se observa en la tabla, los errores en operatoria son muy variados y posiblemente, la repetición de unos errores más que de otros, está ampliamente influenciada por el tipo de ejercicio propuesto, que puede dar más pie a que se produzca un error concreto. Con el objetivo de centrar el estudio en los errores más frecuentes, se seleccionan los 10 más repetidos en el examen y prueba de examen y se muestran en el Gráfico 19.

Errores de operatoria y álgebra	PE	E	Total
Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($\boldsymbol{Ejemplo}: -(-x)^4 = x^4$)	**26**	**33**	**59**
Despistes (al sustituir, copiar, etc)	**7**	**12**	**19**
Cambio de signo de una expresión	1	0	1
Identidades notables ($Ejemplo$: $(x+2)^2 = x^2+4$)	1	1	2
Identidades notables ($Ejemplo$: $(x-2)(x+2) = x^2+4$)	4	5	9
Al introducir o extraer un término de una raíz	6	1	7
Simplificar términos que están sumando en $\left(Ejemplo: \frac{x^2-\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}\right)$	6	3	9
Dividir todos los factores en un producto $\left(\boldsymbol{Ejemplo}: \frac{x^2(x+3)}{x+1} = \frac{\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right)$	**16**	**1**	**17**
$\frac{x^7}{x^7} = 0$	9	0	9
No calcula correctamente el mínimo común múltiplo	1	2	3
Opera mal con el mínimo común múltiplo $Ejemplo$: $\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x+3} = \frac{6(x+3)-1(x-3)}{x^2-9}$	3	4	7
Signo menos multiplicando a un paréntesis con dos términos, se olvidan de multiplicar el signo por el segundo término	4	2	6
A la hora de factorizar, no cambian el signo a la raíz $Ejemplo$: $x = 3 \Rightarrow (x+3)$	4	0	4
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5*, $\sqrt{9} = 6$)	**15**	**30**	**45**
Error al simplificar $\frac{x^3}{x^3} = x$	2	1	3
No realiza la distributiva (se olvida del segundo sumando)	6	1	7
A la hora de factorizar, si la raíz es doble, se olvida de contarla dos veces	1	3	4
Extraer de una raíz un término que está sumando al resto	2	0	2
Al dividir una suma, no divide todos los sumandos	1	1	2
No utiliza paréntesis o se olvida en pasos intermedios	9	3	12
Saca factor común cuando no es posible	1	2	3
Saca un número como factor común en una ecuación y una vez factorizada, se olvida de ponerlo	0	2	2
TOTAL	**125**	**107**	**232**

Tabla 3. Errores de operatoria y álgebra. Frecuencias en la prueba de examen, examen y en total.



Error 1. Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar $(-(-x)^4 = x^4)$
Error 2. Despistes (al sustituir, copiar, etc)
Error 5. Identidades notables $((x-2)(x+2) = x^2 + 4)$
Error 6. Al introducir o extraer un término de una raíz
Error 7. Simplificar términos que están sumando en $\left(\frac{x^2 - \cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}\right)$
Error 8. Dividir todos los factores en un producto $\left(\frac{x^2(x+3)}{x+1} = \frac{\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right)$
Error 10. $\frac{x^7}{x^7} = 0$
Error 15. Error de cálculo básico (2+4=5, $\sqrt{9} = 6$, $4^2 = 8$)
Error 17. No realiza la distributiva (se olvida del segundo sumando)
Error 21. No utiliza paréntesis o se olvida en pasos intermedios

Gráfico 19. Distribución de los 10 errores de operatoria y álgebra más frecuentes.

A partir del Gráfico 19, es posible constatar que los errores de operatoria y álgebra más frecuentes son los relativos a las operaciones con potencias y los signos negativos (error 1), que se incrementan considerablemente en el examen, posiblemente porque los ejercicios dan más lugar a ello. El siguiente tipo de error más frecuente es aquel relativo al cálculo básico, que se duplican en el examen, prueba donde también hay más despistes al sustituir, copiar de un lado a otro una expresión, etc. El resto de errores no son tan frecuentes en el examen, aunque sí tuvieron importancia en la prueba de examen (probablemente el tipo de ejercicio propiciara más su aparición). En cualquier caso, resulta alarmante ver que errores tan elementales son tan reproducidos por los estudiantes a este nivel.

Finalmente, en relación a los errores de notación, la Tabla 4 muestra las frecuencias de los errores en la prueba de examen (PE), examen (E) y en total.

Errores de notación	PE	E	Total
Utilización de otros símbolos para representar ∄	4	0	4
En la resolución, no pone nunca "$\lim\limits_{x\to x_0}$"	**32**	**12**	**44**
Se olvida en algún paso intermedio de poner "$\lim\limits_{x\to x_0}$"	**29**	**5**	**34**
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación	**68**	**65**	**133**
Pone que la expresión obtenida es una indeterminación, pero no especifica el tipo	3	0	3
Pone "$\lim\limits_{x\to x_0}$" cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función	**86**	**4**	**90**
TOTAL	**222**	**86**	**308**

Tabla 4. Errores de notación. Frecuencias en la prueba de examen, examen y en total.

Tal y como se observa en la Tabla 4, los errores de notación han sido drásticamente disminuidos en el examen. No obstante, es significativo que los estudiantes en el examen sigan sin indicar que la expresión obtenida es una indeterminación. Puede ser por simple despiste o una prueba de que aprenden los ejercicios de memoria, sin pararse a reflexionar sobre el tipo de indeterminación obtenida.

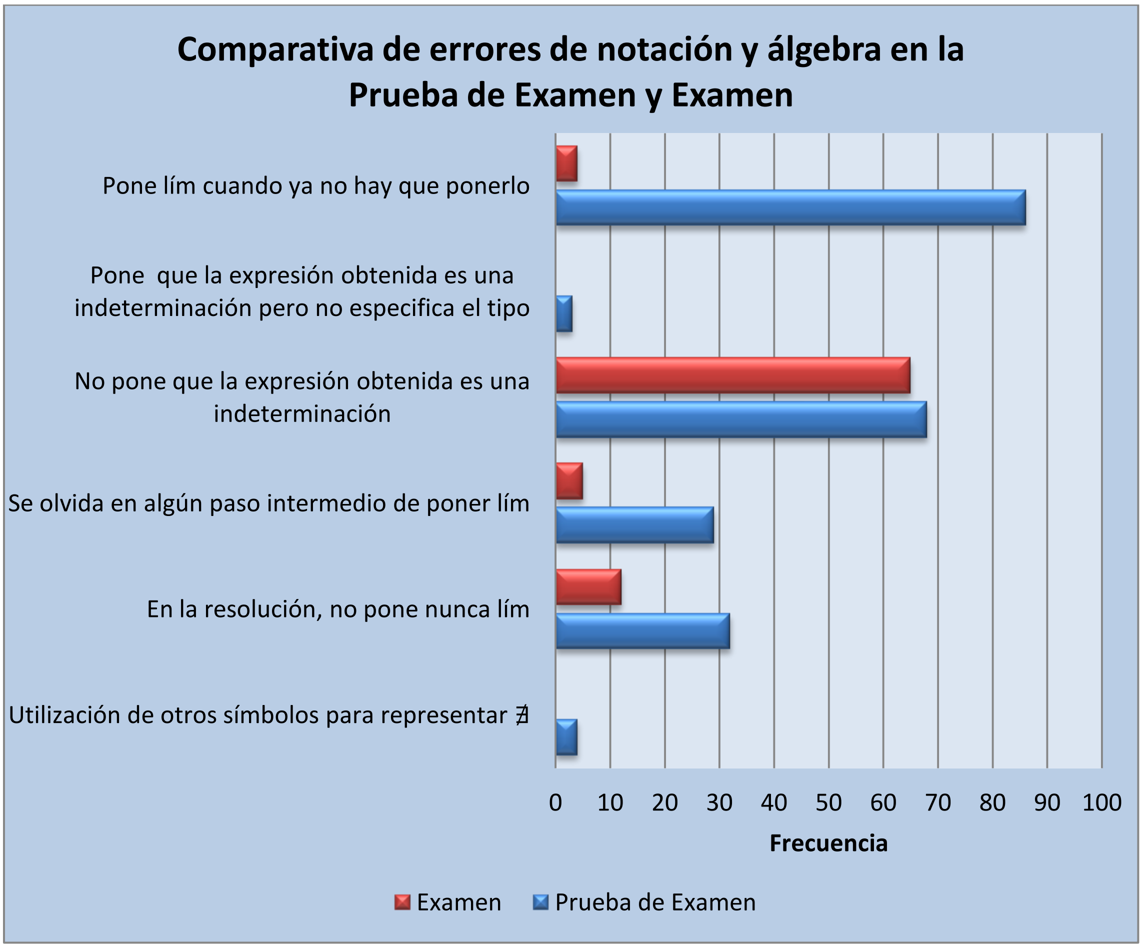


Gráfico 20. Comparativa de errores de notación y álgebra en la prueba de examen y examen

Capítulo 9.
Síntesis, conclusiones y cuestiones abiertas

Síntesis

La enseñanza y el aprendizaje de los contenidos básicos del cálculo es un proceso complejo. El concepto de límite es fundamental pero a la vez supone uno de los mayores retos para los estudiantes de Bachillerato.

En este Trabajo Fin de Máster, se ha procedido al estudio de los errores que cometen los alumnos de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales y de las limitaciones o dificultades a las que se enfrentan precisamente cuando resuelven problemas de límites. Dicho estudio se ha centrado en analizar la naturaleza de estos fallos, dificultades y limitaciones, de sus causas y de su evolución.

Para ello, se ha dividido el trabajo en dos grandes partes. En la primera, se ha llevado a cabo un análisis de los límites en el currículo vigente y en los libros de texto y se ha analizado la coherencia de los libros de texto en relación con el currículo.

A continuación, en la segunda parte, se ha analizado el proceso de estudio de límites. Este análisis comprende el estudio del tema en el libro de texto de referencia, de las dificultades y errores previsibles de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, la descripción del proceso de enseñanza-aprendizaje (número y tipo de sesiones impartidas, actividades propuestas, etc), y finalmente, la experimentación (muestra, cuestionarios para la recopilación de resultados y exposición y discusión de los mismos).

Conclusiones

Tras el análisis de los resultados obtenidos sobre el proceso de estudio de límites en estudiantes de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales, son varias las conclusiones extraídas.

En primer lugar, relativo al cálculo de límites a través de la gráfica de una función, cabe decir que los resultados de las pruebas denotan una falta de comprensión y asimilación del concepto de límite. Es muy probable que el causante sea el elevado grado de abstracción de dicho concepto y por ello se propone la utilización de técnicas interactivas con las que poder realizar construcciones dinámicas que ayuden al estudiante visualizarlo. En este sentido, sería además beneficioso utilizar este tipo de recursos para relacionar directamente el lado más teórico y abstracto de este tema con la parte gráfica, que por lo general les resulta más cercana e intuitiva, y aprovechar esta relación para impulsar y promover métodos de resolución gráfica. Resulta llamativo que a pesar de haber impartido las clases incitando al uso de métodos gráficos en los casos de límites más sencillos, tan sólo dos estudiantes hayan recurrido a ellos durante la prueba de examen y ninguno en el examen. Probablemente sea debido a la falta de costumbre y a la falta de confianza en métodos de este tipo. Sin embargo, la normalización de este tipo de técnicas resulta conveniente no sólo porque les proporciona una alternativa para la resolución analítica de límites sencillos, sino porque dota al alumno de herramientas de control y garantiza una visión más amplia e integral del contenido, asegurando una mayor comprensión.

En segundo lugar, relativo al cálculo de límites a través de la expresión analítica de la función, es conveniente señalar que los errores de tipo conceptual y de origen algebraico y de operatoria son aquellos que persisten a pesar de la fase de estudio autónomo llevada a cabo por el alumno, mientras que los de tipo metodológico o de notación tienden a desaparecer. Así pues, para eliminar o al menos disminuir la cantidad de estos errores de operatoria y conceptuales, sería conveniente incidir más en ellos desde el principio del tema. Con el fin de reducir los errores conceptuales, sería adecuado invertir más tiempo en la explicación de los conceptos clave, preferiblemente tal y como se ha indicado, con construcciones dinámicas realizadas con programas como GeoGebra. Con vistas a erradicar los fallos de tipo algebraico o de operatoria, una solución posible sería revisar al comienzo del tema los errores de este tipo más frecuentes. Ahora bien, lo ideal para eliminar los errores de operatoria y álgebra sería por un lado, atajar el problema en el momento en el que surge, es decir, en el momento de la explicación del tema correspondiente y por otro lado, promover una mayor interrelación entre los contenidos matemáticos de manera que el alumno sea capaz de utilizar convenientemente en todo momento nociones y propiedades vistas en otros temas. Todo ello sin descuidar las técnicas de estudio de los estudiantes, procurando enseñarles estrategias y procedimientos eficaces que vayan más allá de la repetición de los ejercicios de clase.

Finalmente, resaltar que el análisis del proceso de estudio de límites muestra que no es fácil ni evidente para los estudiantes adentrarse en el campo del Análisis matemático y de hecho, por la forma en que es tratado este tema en bachillerato, este prácticamente desaparece, quedando únicamente su parte más algebraizada.

Cuestiones abiertas

La impartición del concepto de límite se hizo mediante la utilización de construcciones dinámicas con GeoGebra desde el convencimiento de que este programa proporcionaba los recursos más adecuados para ello. No obstante, a pesar de la valoración positiva de esta herramienta por parte de los estudiantes, los resultados de las pruebas no son suficientes como para llevar a cabo un estudio riguroso que permita esclarecer su conveniencia. Se podría plantear para ello tomar dos muestras, una de ellas con estudiantes a los que se les haya sometido a sesiones con GeoGebra y otra con estudiantes a los que se les haya explicado el concepto de límite de forma tradicional en pizarra y someterles al mismo examen. El análisis de estos resultados sí permitiría extraer conclusiones consistentes respecto a esta cuestión.

Referencias

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). REAL DECRETO 1631/2006, del 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE núm. 5, del 5 de enero, 677-773.

Ministerio de Educación, Política Social y Deporte (2008). ORDEN ESD/1729/2008, del 11 de junio, por la que se establece el currículo oficial de bachillerato. BOE núm. 147, del 18 de junio, 27492-27608.

Escoredo A., Gómez M., Lorenzo J., Machín P., Pérez C., Rey M., Del Río, J. y Sánchez D. (2009). *Matemáticas 2 Bachillerato aplicadas a las Ciencias Sociales II.* Torrelaguna (Madrid): Santillana Educación

Escoredo A., Gómez M., Lorenzo J., Machín P., Pérez C., Rey M., Del Río, J. y Sánchez D. (2009). *Matemáticas II 2 Bachillerato*. Torrelaguna (Madrid): Santillana Educación

González C., Llorente J. y Ruíz M. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Pozuelo de Alarcón (Madrid): Editex

Antonio M., González L., Lorenzo J., Molano A., Del Río, J., Santos D. y De Vicente, M. (2008). *Matemáticas I 1 Bachillerato*. Torrelaguna (Madrid): Santillana Educación

González G. (2009). *Matemáticas opción B*. Pozuelo de Alarcón (Madrid): Editex

González G. (2009). *Matemáticas opción A*. Pozuelo de Alarcón (Madrid): Editex

Magallo, J. (2008). *Matemáticas*. Pozuelo de Alarcón (Madrid): Editex

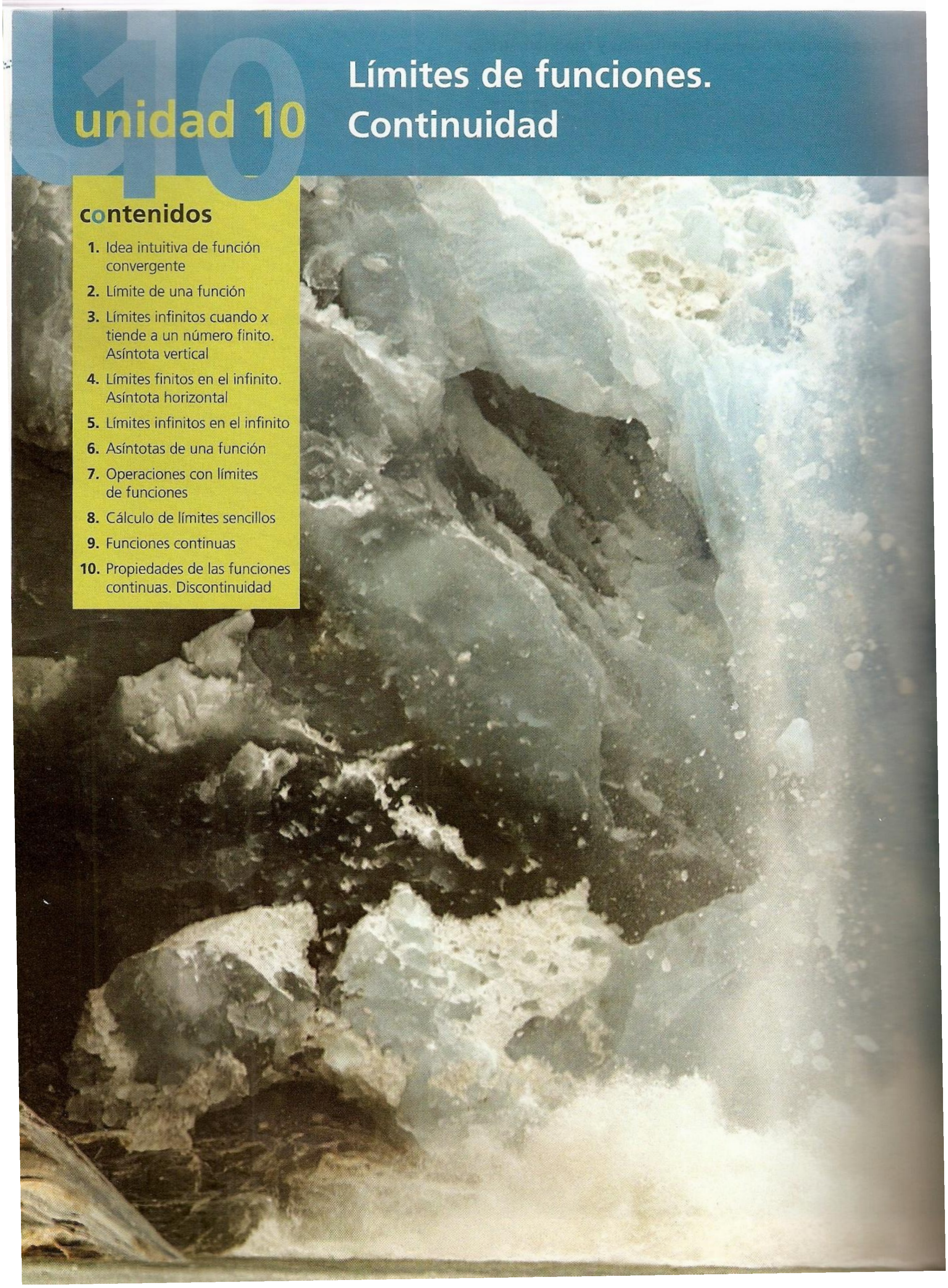
Stewart, J. (2001). *Cálculo de una Variable. 4ta*. Madrid: Thomson-Learning

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9 (Especial), 133–156.

Anexos

A. Unidad didáctica del libro de texto
B. Construcciones dinámicas con GeoGebra
C. Apuntes del tema de límites
D. Encuesta
E. Trabajo colaborativo
F. Plantilla de errores

A. **UNIDAD DIDÁCTICA DEL LIBRO DE TEXTO**



10

unidad 10

Límites de funciones.
Continuidad

contenidos

Una de las ramas de las Matemáticas es el análisis matemático o estudio de funciones. El concepto base, sin duda, del análisis es la noción de **límite de una función.**

Con la idea de límite de una función pretendemos estudiar el comportamiento o tendencia de la misma, cuando la variable x tiende a x_0, a $+\infty$ ó a $-\infty$.

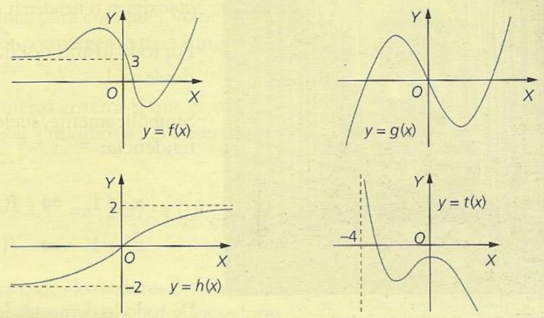
A su vez, este concepto está muy unido con la representación gráfica de funciones y la interpretación de las mismas.

A partir del concepto de límite de una función, se construyen los conceptos de **continuidad, derivación e integración,** que son los conceptos pilares del análisis.

La palabra tendencia se utiliza muy a menudo. Estamos acostumbrados a escuchar que algunas especies de animales y plantas tienden a desaparecer del planeta, o que la Tierra tiende a calentarse, lo que provoca y que los hielos polares tiendan a derretirse.

cuestiones iniciales

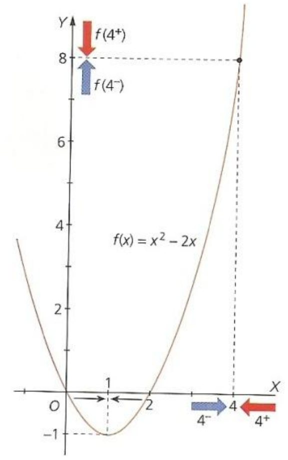
1. Comenta la tendencia de las siguientes funciones:



→

1. Idea intuitiva de función convergente

Función convergente en $x = 4$



$$\left.\begin{array}{l} x \to 4^- \Rightarrow f(x) \to 8 \\ x \to 4^+ \Rightarrow f(x) \to 8 \end{array}\right\} x \to 4 \Rightarrow f(x) \to 8$$

Vamos a estudiar el comportamiento de la función $f(x) = x^2 - 2x$ para valores próximos a $x = 4$. Para ello, vemos cómo actúa esta función para valores próximos a 4, pero menores que 4 y para valores próximos a 4, pero mayores que 4.

En la tabla siguiente observamos que, cuando damos a x valores próximos a 4 e inferiores a 4, la función $f(x)$ se *aproxima* o *tiende* a 8. En este caso decimos que cuando x *tiende* a 4 por la izquierda, $f(x)$ *tiende* a 8, y lo expresamos de la siguiente forma:

$$x \to 4^- \Rightarrow f(x) \to 8$$

x	3	3,5	3,9	3,99	3,999	3,9999	—
$f(x)$	3	5,25	7,41	7,9401	7,994001	7,99940001	—

En la tabla que figura a continuación observamos que, cuando damos a x valores próximos a 4 y superiores a 4, la función $f(x)$ se *aproxima* o *tiende* a 8. En este caso decimos que cuando x *tiende* a 4 por la derecha, $f(x)$ *tiende* a 8, y lo expresamos de la siguiente forma:

$$x \to 4^+ \Rightarrow f(x) \to 8$$

…	4,0001	4,001	4,01	4,1	4,5	5	x
…	8,00060001	8,006001	8,0601	8,61	11,25	15	$f(x)$

↑ Las arcadas de la catedral sugieren tendencia.

Por todo lo anterior, podemos decir que, cuando x *tiende* a 4, $f(x)$ *tiende* a 8 y podemos escribir:

$$x \to 4 \Rightarrow f(x) \to 8$$

De forma análoga, mediante las correspondientes tablas de valores o observando la gráfica del margen podemos ver que, cuando damos a x valores muy próximos a 1 e inferiores a 1, los correspondientes valores que toma la función $f(x) = x^2 - 2x$ se *aproximan* o *tienden* a -1, y que cuando damos a x valores muy próximos a 1 y superiores a 1, los correspondientes valores que toma la función $f(x) = x^2 - 2x$ se *aproximan* o *tienden* a -1.

Por todo lo anterior decimos que cuando x *tiende* a 1 la función $f(x)$ *tiende* a -1.

Simbólicamente, suele expresarse de la manera siguiente esta idea de tendencia:

$$\left.\begin{array}{l} x \to 1^- \Rightarrow f(x) \to -1 \\ x \to 1^+ \Rightarrow f(x) \to -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \to 1 \Rightarrow f(x) \to -1$$

De todo lo demostrado en las dos partes anteriores, podemos afirmar que la función $f(x) = x^2 - 2x$ es convergente en $x = 4$ y en $x = 1$.

Veamos ahora el comportamiento de la función $g(x) = x - E[x]$, o función que nos da la parte decimal de x, cuando x *tiende* a 1 por la izquierda y por la derecha.

La tabla siguiente nos muestra la tendencia por la izquierda:

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999	...
$g(x)$	0	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999	...

Decimos que cuando x *tiende* a 1 por la izquierda $g(x)$ *tiende* a 1 y escribimos:

$$x \to 1^- \Rightarrow g(x) \to 1$$

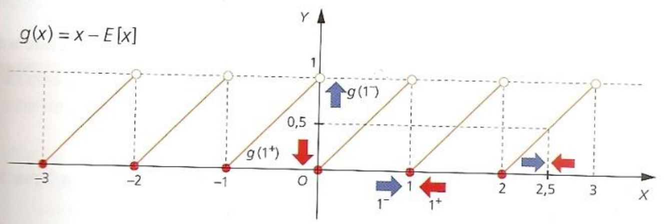
La tabla siguiente nos muestra la tendencia por la derecha:

...	1,00001	1,0001	1,001	1,01	1,1	1,5	1,9	x
...	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9	$g(x)$

Decimos que cuando x *tiende* a 1 por la derecha, $g(x)$ *tiende* a 0 y escribimos:

$$x \to 1^+ \Rightarrow g(x) \to 0$$

Por lo anterior, podemos decir que cuando x *tiende* a 1, $g(x)$ no *tiende* a ningún valor, como podemos también ver en la gráfica:



$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1) \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2) \end{cases}$$

Simbólicamente podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} x \to 1^- \Rightarrow g(x) \to 1 \\ x \to 1^+ \Rightarrow g(x) \to 0 \end{array}\right\} \text{ Si } x \to 1 \Rightarrow \begin{array}{l} g(x) \text{ no tiende} \\ \text{a ningún valor} \end{array}$$

Esta función $g(x)$ se comporta de forma análoga para cualquier valor entero de x, por tanto podemos decir que $g(x)$ **no es convergente** para ningún valor entero de x.

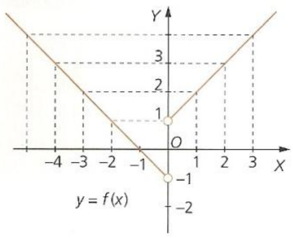
En cambio para valores de x que no sean números enteros sí que es convergente puesto que, por ejemplo, para valores de x próximos a 2,5 observamos:

$$\left.\begin{array}{l} x \to 2{,}5^- \Rightarrow g(x) \to 0{,}5 \\ x \to 2{,}5^+ \Rightarrow g(x) \to 0{,}5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \to 2{,}5 \Rightarrow g(x) \to 0{,}5$$

Esta función se comporta del mismo modo para todos los valores de x que no sean enteros. Por tanto la función $g(x)$ **es convergente** para todos los valores de x que no sean números enteros.

2. Límite de una función

2.1. Límites laterales



$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

$\nexists f(0)$

En el epígrafe 1 hemos visto que la función $f(x) = x^2 - 2x$ tiende a 8 cuando x tiende a 4 por la izquierda. Podemos escribir:

$$\lim_{x \to 4^-} (x^2 - 2x) = 8$$

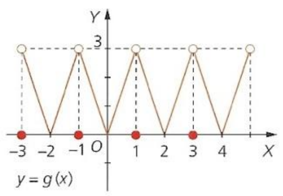
Asimismo, la función $g(x) = x - E[x]$ tiende a 1 cuando x tiende a 1 por la izquierda. Podemos escribir:

$$\lim_{x \to 1^-} (x - E[x]) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

En general decimos que:

- Una función $f(x)$ tiene por **límite** L cuando x tiende a x_0 **por la izquierda** si al dar valores a x próximos a x_0 y menores que x_0 los correspondientes valores que toma la función $f(x)$ se aproximan a L. Simbólicamente:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = L$$



$\lim_{x \to 1^-} g(x) = 3$

$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 3$

$\exists\, g(1) = 0$

En el mismo epígrafe 1 hemos visto que la función $f(x) = x^2 - 2x$ tiende a 8 cuando x tiende a 4 por la derecha. Podemos escribir:

$$\lim_{x \to 4^+} (x^2 - 2x) = 8$$

Asimismo, la función $g(x) = x - E[x]$ tiende a 0 cuando x tiende a 1 por la derecha. Podemos escribir:

$$\lim_{x \to 1^+} (x - E[x]) = \lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0$$

En general decimos que:

- Una función $f(x)$ tiene por **límite** L cuando x tiende a x_0 **por la derecha** si al dar valores a x próximos a x_0 y mayores que x_0, los correspondientes valores que toma la función $f(x)$ se aproximan a L. Simbólicamente:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad \text{ó} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = L$$

Al límite por la izquierda de una función al tender x a x_0 y al límite por la derecha de una función al tender x a x_0 se les llama **límites laterales** de la función.

Para hallar los límites laterales de una función cuando x tiende a x_0 no es necesario que esté definida la función en el punto de abscisa x_0, como podemos ver en el margen.

2.2. Límite de una función

Observamos que la función $f(x) = x^2 - 2x$ tiene límite lateral por la izquierda y límite lateral por la derecha cuando x tiende a 4, y ambos son iguales a 8, por lo que el límite de la función, cuando x tiende a 4, existe y vale 8.

$$\lim_{x \to 4} (x^2 - 2x) = 8$$

Sin embargo, la función $g(x) = x - E[x]$ no tiene límite cuando x tiende a 1, puesto que, aunque los límites laterales, cuando x tiende a 1, existen, no son coincidentes.

$$\lim_{x \to 1^-} (x - E[x]) = 1; \quad \lim_{x \to 1^+} (x - E[x]) = 0$$

$$\text{no existe } \lim_{x \to 1} (x - E[x])$$

En general decimos que:

- Una función $f(x)$ tiene **límite** cuando x tiende a x_0 si tiene límite por la derecha y por la izquierda, cuando x tiende a x_0, y ambos coinciden. Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \begin{cases} \exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \\ \exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \end{cases}$$

El concepto de límite está íntimamente unido al concepto de convergencia de una función.

- Una función $f(x)$ **es convergente** en un punto de abscisa x_0 si tiene límite cuando x tiende a x_0. Es decir:

$$f \text{ convergente en } x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Lenguaje matemático

En Matemáticas se utilizan diversos símbolos por comodidad y fluidez en la escritura. Algunos son:

$\exists$	se lee «existe»
$\nexists$	se lee «no existe»
$\Leftrightarrow$	se lee «si y sólo si»
$\Rightarrow$	se lee «implica»

ACTIVIDADES RESUELTAS

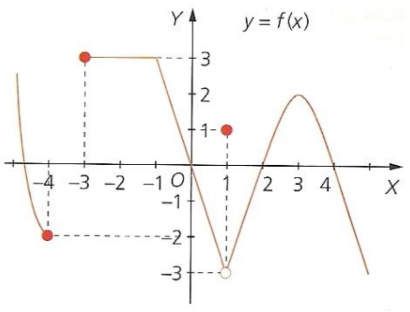
1. En la función dada mediante su gráfica, calcula los límites siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = -2 \\ \lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = \text{no existe} \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to -4} f(x)$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

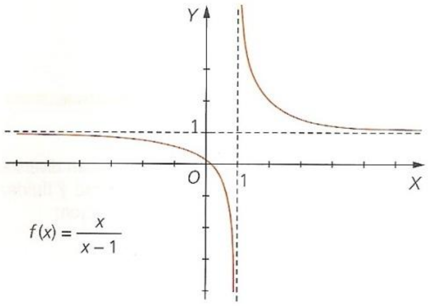
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 3$$



$f(x)$ es convergente en $x = 1$ pero no es convergente en $x = -4$.

3. Límites infinitos cuando x tiende a un número finito. Asíntota vertical



$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

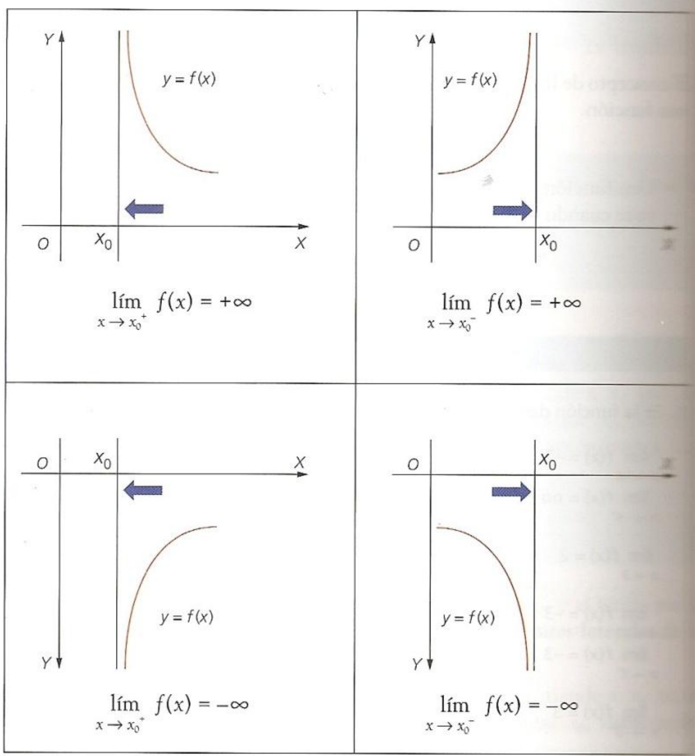
Observando la gráfica del margen, correspondiente a la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, vemos que a medida que nos aproximamos a 1, por la izquierda, los correspondientes valores que toma la función se hacen cada vez más pequeños y tienden a $-\infty$, es decir:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

Del mismo modo vemos que a medida que nos aproximamos a 1 por la derecha los correspondientes valores que toma la función se hacen cada vez más grandes y tienden a $+\infty$, es decir:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

La idea de **límites infinitos** de una función **cuando** x **tiende a un número real** por la derecha o por la izquierda queda recogida en el siguiente esquema:



$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

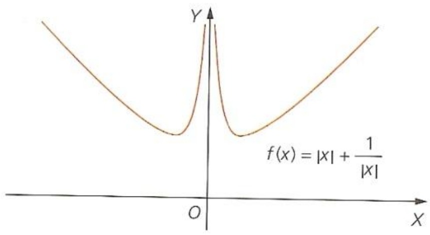
Símbolo del Infinito

John Wallis (1616-1703) fue un matemático inglés que en su obra *Arithmetica Infinitorum* utilizó por primera vez el símbolo del infinito cuya grafía es como un ocho tumbado.

∞

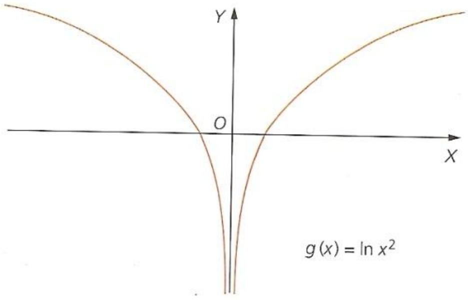
La función del margen $f(x) = |x| + \dfrac{1}{|x|}$ tiene la peculiaridad que a medida que damos a x valores próximos a 0, tanto menores como mayores que 0, los correspondientes valores que toma la función se hacen cada vez más grandes tendiendo hacia $+\infty$, es decir:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

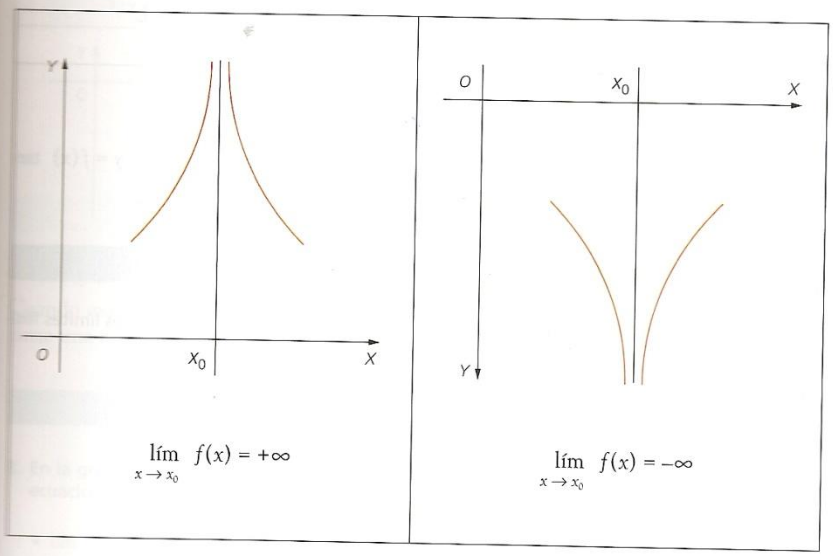


Del mismo modo, la función $g(x) = \ln x^2$ verifica que a medida que damos a x valores próximos a 0, tanto menores como mayores que 0, los correspondientes valores que toma la función se hacen cada vez más pequeños tendiendo hacia $-\infty$, es decir:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$



La idea de **límites infinitos** de una función **cuando x tiende a un número real** gráficamente la podemos ver en el siguiente esquema:



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

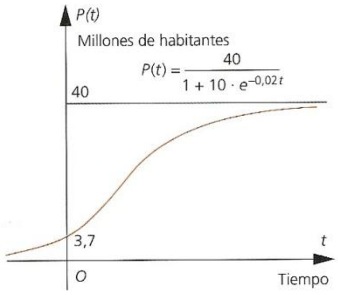
Asíntota vertical

Cuando existe uno de estos seis límites, los cuatro de la página anterior o los dos de esta página, decimos que la función $y = f(x)$ tiene una **asíntota vertical** de ecuación $x = x_0$.

Las asíntotas verticales son rectas paralelas al eje de ordenadas, eje OY, hacia las cuales se dirige la gráfica de la función sin llegar a tocarlas.

→

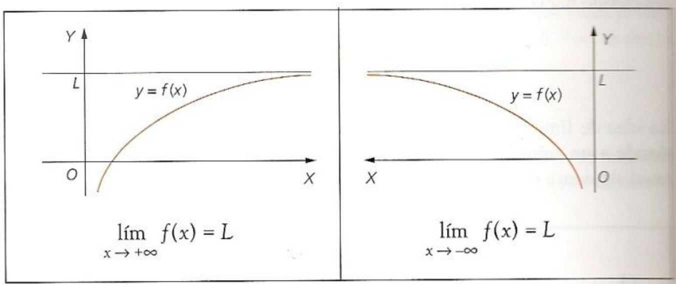
4. Límites finitos en el infinito. Asíntota horizontal



La gráfica del margen muestra el crecimiento de la población humana a través de una función llamada función logística. En esta gráfica observamos que la población va creciendo hasta que llega un momento que se estabiliza debido a la saturación del medio. Es decir, para valores muy grandes de la variable x la función tiende hacia 40, por tanto podemos poner:

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = 40$$

La idea de **límite finito cuando x tiende a infinito** la recogemos en el siguiente esquema:

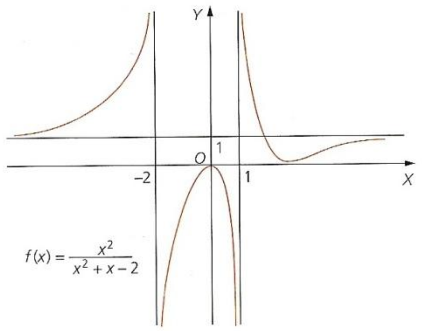


Asíntota horizontal

Cuando existe uno de estos dos límites decimos que la función $y = f(x)$ tiene una **asíntota horizontal** de ecuación $y = L$.

ACTIVIDADES RESUELTAS

2. Calcula en la siguiente función, cuya gráfica es conocida, los límites infinitos cuando $x \to -2$ y $x \to 1$, los límites finitos en el infinito y las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.



- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

Asíntota horizontal:

$y = 1$

Asíntotas verticales:

$x = -2$

$x = 1$

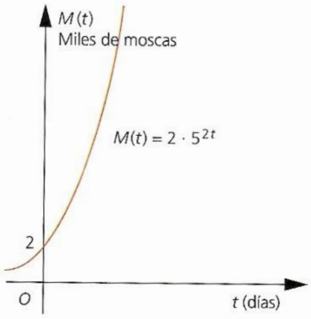
5. Límites infinitos en el infinito

La gráfica del margen muestra el crecimiento de una población de moscas y viene dada por:

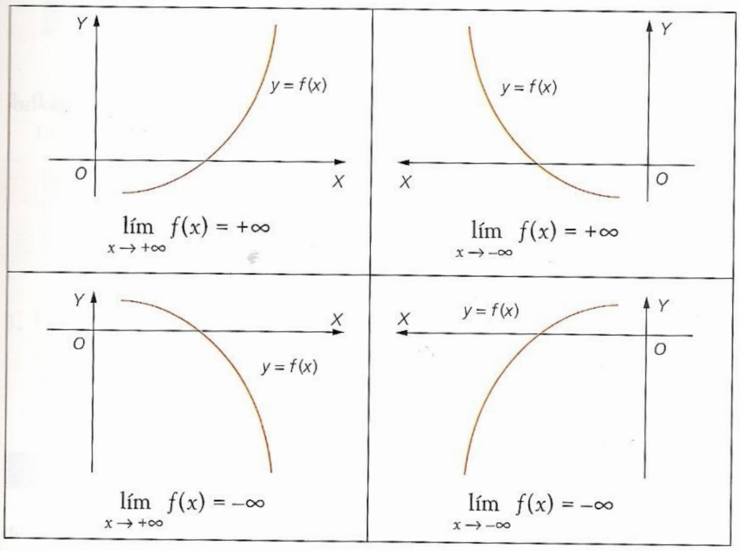
$$M(t) = 2 \cdot 5^{2t}$$

donde $M(t)$ es el número de moscas, en miles, en función del tiempo t, en días. Si observamos la gráfica vemos que a medida que pasan los días la población aumenta. Podemos escribir:

$$\lim_{t \to +\infty} M(t) = +\infty$$



La idea de **límites infinitos en el infinito** queda recogida en el siguiente esquema:

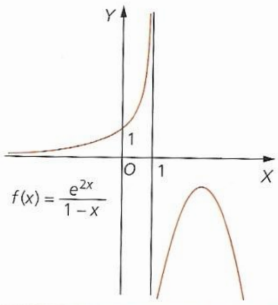


Cuando existe uno de estos cuatro límites decimos que la función $y = f(x)$ tiene **una rama parabólica.**

ACTIVIDADES RESUELTAS

3. En la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1-x}$ halla los siguientes límites y las ecuaciones de las asíntotas.

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



Esta función tiene dos asíntotas, una vertical de ecuación $x = 1$ y otra horizontal de ecuación $y = 0$. Además tiene una rama parabólica.

6. Asíntotas de una función

En los epígrafes anteriores hemos visto algunas de las asíntotas que puede presentar una función, en concreto las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales. En general podemos afirmar que:

- Una **asíntota** es una recta hacia la cual se dirige la gráfica de la función sin llegar a tocarla.

  Una función puede presentar tres tipos de asíntotas:

  - Asíntotas verticales.
  - Asíntotas horizontales.
  - Asíntotas oblicuas.

- **Asíntota vertical** es una recta de la forma $x = x_0$ que verifica, como hemos visto en el epígrafe 3:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

- **Asíntota horizontal** es una recta de la forma $y = L$ que verifica, como hemos visto en el epígrafe 4:

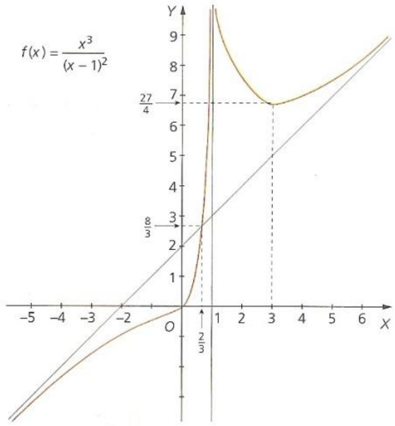
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

- **Asíntota oblicua** es una recta de la forma $y = mx + b$ siendo:

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} \\ b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - m \cdot x] \end{cases}$$

ACTIVIDADES RESUELTAS

4. Dada la gráfica de la siguiente función, calcula los límite infinitos cuando $x \to 1$, los límites infinitos en el infinito y las ecuaciones de sus asíntotas.



- Límites infinitos cuando $x \to 1$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$$

- Límites infinitos en el infinito.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty$$

- Asíntota vertical: $x = 1$
- Asíntota oblicua. Es la recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 2)$.

$$r:\ y = mx + b$$

$$\left.\begin{array}{l} (-2, 0) \in r \Rightarrow 0 = -2m + b \\ (0, 2) \in r \Rightarrow 2 = b \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b = 2 \\ m = 1 \end{array}$$

$$r:\ y = x + 2$$

7. Operaciones con límites de funciones

Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ convergentes en x_0, es decir que:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{y} \quad \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = M$$

Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. **Límite de la suma o diferencia de funciones.** El límite de la suma o diferencia de dos funciones es la suma o diferencia de los límites de dichas funciones:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L \pm M$$

2. **Límite del producto de funciones.** El límite del producto de dos funciones es el producto de los límites de esas funciones:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x \to x_0} g(x)\right] = L \cdot M$$

3. **Límite del cociente de dos funciones.** El límite del cociente de dos funciones es el cociente de los límites de esas funciones siempre que el límite del denominador no sea nulo.

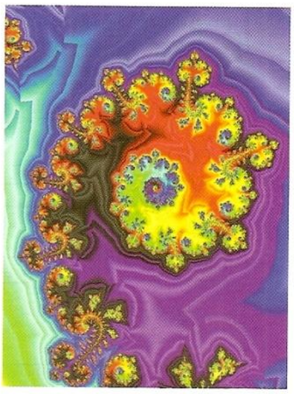
$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{con } M \neq 0$$

4. **Límite de la función logarítmica.** El límite de la función logarítmica es el logaritmo del límite de la función, siempre que este límite sea positivo.

$$\lim_{x \to x_0} \log_a [f(x)] = \log_a \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right] = \log_a L \quad \text{con } L > 0$$

5. **Límite de una función elevada a otra función.** El límite de una función elevada a otra función es el límite de la función de la base, siempre que este sea positivo, elevado al límite de la función del exponente.

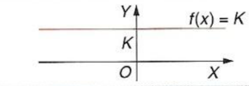
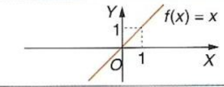
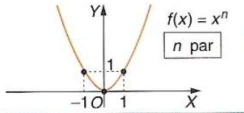
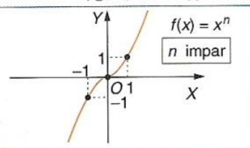
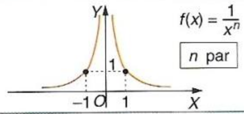
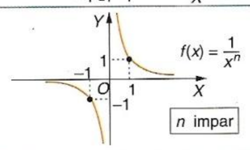
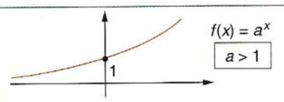
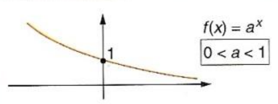
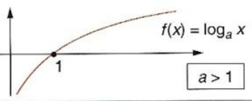
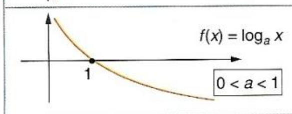
$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = L^M \quad \text{con } L > 0$$



↑ Fractal.

8. Cálculo de límites sencillos

A través de las correspondientes gráficas, resulta fácil comprender los límites más sencillos.

FUNCIONES	GRÁFICAS	LÍMITES		
F. CONSTANTE $\boxed{f(x)=K}$		$\lim\limits_{x\to x_0} K = K$	$\lim\limits_{x\to +\infty} K = K$	$\lim\limits_{x\to -\infty} K = K$
F. IDENTIDAD $\boxed{f(x)=x}$		$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$
F. POTENCIAL DE EXPONENTE NATURAL $\boxed{f(x)=x^n}$ $n\in N$ $n\geq 2$		$\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$	$\lim\limits_{x\to \pm\infty} x^n = +\infty$	
		$\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} x^n = -\infty$
F. POTENCIAL DE EXPONENTE ENTERO NEGATIVO $\boxed{f(x)=\frac{1}{x^n}=x^{-n}}$ $-n\in Z^-$ $n\geq 2$		$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}$ $x_0\neq 0$	$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$
		$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n}$ $x_0\neq 0$	$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$
FUNCIÓN EXPONENCIAL $\boxed{f(x)=a^x}$ $a>0;\ a\neq 1$		$\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$
		$\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$	$\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = +\infty$
FUNCIÓN LOGARÍTMICA $\boxed{f(x)=\log_a x}$ $a>0;\ a\neq 1$		$\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$ $x_0\neq 0$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$
		$\lim\limits_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$ $x_0\neq 0$	$\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$

Hasta ahora hemos visto dos formas distintas de calcular límites: de forma intuitiva, lo cual resulta muy laborioso, o de forma gráfica a través de la representación de la función, lo cual no siempre es posible por no conocer esta gráfica.

En la práctica, para calcular límites hemos de tener en cuenta las propiedades u operaciones con límites y las siguientes reglas:

Regla I

Para calcular el límite de una función, cuando x tiende a x_0, basta con sustituir x_0 en la función y si nos da un número ya está resuelto el límite.

Regla II

Las funciones polinómicas, cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$, se comportan del mismo modo que su término de mayor grado:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = \lim_{x \to \pm\infty} (a_n x^n)$$

Utilidades

En el cálculo de límites aparecen a veces expresiones como las siguientes, que es muy útil recordar:

- $\frac{K}{\pm\infty} = 0 \quad (K \in \mathbb{R})$
- $\frac{\pm\infty}{K} = \pm\infty \; (K \in \mathbb{R})$
- $\frac{0}{K} = 0 \quad (K \neq 0)$
- $K^{+\infty} = +\infty$ si $(K > 1)$
- $K^{+\infty} = 0$ si $(0 < K < 1)$

ACTIVIDADES RESUELTAS

5. Calcula los límites que se indican.

- $\lim_{x \to 3} 2 = 2$
- $\lim_{x \to -\infty} 3 = 3$
- $\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$
- $\lim_{x \to 7} (2x + 1) = 15$
- $\lim_{x \to +\infty} (2x^2 + 1) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} (-5x + 2) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} (-5x + 2) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} (x^6 - 4x^2 + 2) = \lim_{x \to +\infty} x^6 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} (x^6 - 3x) = \lim_{x \to -\infty} x^6 = +\infty$
- $\lim_{x \to 2} x^5 = 2^5 = 32$
- $\lim_{x \to +\infty} (3x^5 - 4x^3) = \lim_{x \to +\infty} 3x^5 = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}x^5 - 2x^4\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}x^5\right) = -\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^8} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{-5}{x^{10}} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^6} = +\infty$
- $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{8}$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{4}{x^3} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{6}{x^5} = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} 0{,}8^x = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} 7^{2x} = 7^0 = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} 6^{3x} = +\infty$

Tipos de indeterminaciones

Las indeterminaciones se presentan de distintas formas:

INDETERMINACIONES	TIPOS
$\frac{+\infty}{+\infty}$	$\frac{\infty}{\infty}$
$\frac{-\infty}{-\infty}$	
$\frac{+\infty}{-\infty}$	
$\frac{-\infty}{+\infty}$	
$(\pm\infty)\cdot 0$	$0\cdot\infty$
$0\cdot(\pm\infty)$	
$\frac{L}{0}$	$\frac{K}{0}$
$\frac{\pm\infty}{0}$	
$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
$(+\infty)-(+\infty)$	$\infty-\infty$
$(-\infty)-(-\infty)$	
$(+\infty)+(-\infty)$	
$(-\infty)+(+\infty)$	
0^0	0^0
$(+\infty)^0$	∞^0
$1^{-\infty}$	1^∞
$1^{+\infty}$	

Regla III

Cuando al aplicar la regla I en el cálculo de límites el resultado obtenido no tiene sentido aparecen **las indeterminaciones** que son expresiones como las del margen:

- **Las indeterminaciones** son expresiones de las formas:

$$\frac{\infty}{\infty};\quad \frac{0}{0};\quad \frac{K}{0};\quad 0\cdot\infty;\quad \infty-\infty;\quad 1^{\infty}$$

Para resolver estas indeterminaciones hay que utilizar los procedimientos que aparecen a continuación:

Resolución de indeterminaciones

- **Indeterminaciones del tipo** $\frac{\infty}{\infty}$**.** Aparecen al calcular límites de funciones polinómicas. Se resuelven dividiendo numerador y denominador por la máxima potencia o utilizando la siguiente expresión:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Resolvemos algún ejemplo:

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5-7x^2+2}{-5x^2-6x+1}\ \frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^5}{-5x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{3}{5}x^3\right]=+\infty$

- **Indeterminaciones del tipo** $\frac{0}{0}$**.** Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones polinómicas o de funciones irracionales. El primer caso se resuelve factorizando los polinomios numerador y denominador, mediante la regla de Ruffini, y el segundo caso se resuelve multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada de la función que lleve raíz.

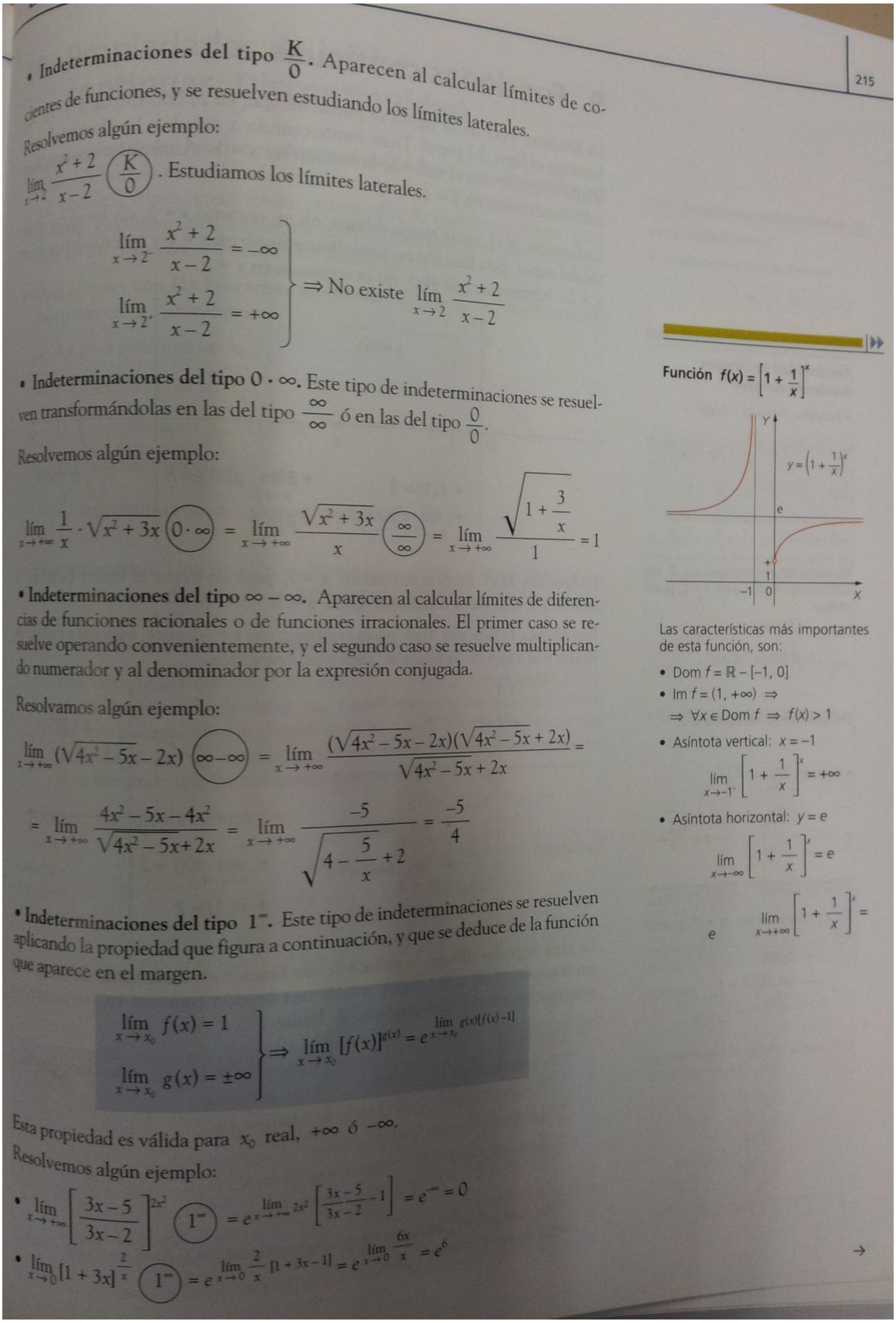
Resolvemos algún ejemplo:

- $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-3x+2}\ \frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)}=0$

- $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}\ \frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)}\ \frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x(\sqrt{x^2+5}+3)}=\frac{2+2}{2(\sqrt{2^2+5}+3)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$



215

- **Indeterminaciones del tipo $\frac{K}{0}$.** Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones, y se resuelven estudiando los límites laterales.

Resolvemos algún ejemplo:

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{x-2}\left(\frac{K}{0}\right)$. Estudiamos los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2}{x-2}=-\infty\\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+2}{x-2}=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{No existe } \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{x-2}$$

- **Indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$.** Este tipo de indeterminaciones se resuelven transformándolas en las del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ó en las del tipo $\frac{0}{0}$.

Resolvemos algún ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x^2+3x}\,(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{1}=1$$

- **Indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$.** Aparecen al calcular límites de diferencias de funciones racionales o de funciones irracionales. El primer caso se resuelve operando convenientemente, y el segundo caso se resuelve multiplicando numerador y al denominador por la expresión conjugada.

Resolvamos algún ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-5x}-2x)\,(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{4x^2-5x}-2x)(\sqrt{4x^2-5x}+2x)}{\sqrt{4x^2-5x}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-5x-4x^2}{\sqrt{4x^2-5x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\sqrt{4-\frac{5}{x}}+2}=\frac{-5}{4}$$

- **Indeterminaciones del tipo 1^∞.** Este tipo de indeterminaciones se resuelven aplicando la propiedad que figura a continuación, y que se deduce de la función que aparece en el margen.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_0} f(x)=1\\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1]}$$

Esta propiedad es válida para x_0 real, $+\infty$ ó $-\infty$.

Resolvemos algún ejemplo:

- $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x-5}{3x-2}\right]^{2x^2}(1^\infty)=e^{\lim_{x\to+\infty}2x^2\left[\frac{3x-5}{3x-2}-1\right]}=e^{-\infty}=0$
- $\lim_{x\to 0}[1+3x]^{\frac{2}{x}}(1^\infty)=e^{\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}[1+3x-1]}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{6x}{x}}=e^6$

Función $f(x)=\left[1+\frac{1}{x}\right]^x$

Las características más importantes de esta función, son:

- Dom $f=\mathbb{R}-[-1,0]$
- Im $f=(1,+\infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow \forall x\in \text{Dom } f \Rightarrow f(x)>1$
- Asíntota vertical: $x=-1$

$$\lim_{x\to-1^-}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x=+\infty$$

- Asíntota horizontal: $y=e$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x=e$$

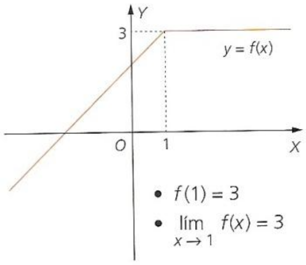
$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x=$$

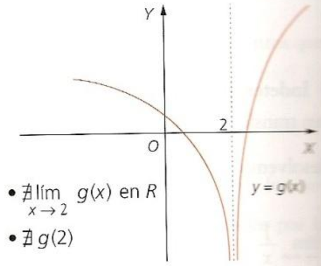
e

9. Funciones continuas

La función $f(x)$ de la figura se puede dibujar, en el entorno de $x = 1$, sin levantar el lápiz del papel. Tiene límite cuando x tiende a 1 y el valor de este límite coincide con el valor de la función en $x = 1$. Afirmamos que esta función es continua en $x = 1$.

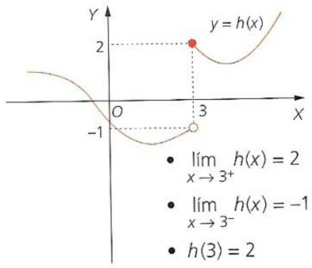
La función $g(x)$ no se puede dibujar, en un entorno $x = 2$, sin levantar el lápiz del papel. Esta función no tiene límite finito en $x = 2$ y no está definida en $x = 2$. Afirmamos que $g(x)$ no es continua en $x = 2$.

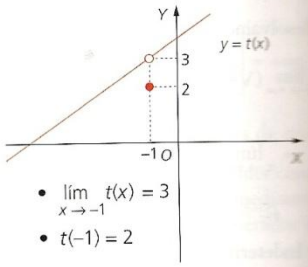




La función $h(x)$ no es continua en $x = 3$, pues no existe el límite cuando x tiende a 3, aunque sí está definida en $x = 3$.

Por último, la función $t(x)$ no es continua en $x = -1$ pues, aunque existen el límite y el valor de la función, ambos no coinciden.





La idea de poder dibujar la gráfica de una función en un entorno de un punto sin levantar el lápiz del papel, o la de una función continua en ese punto, se matematiza a través del concepto de **límite**.

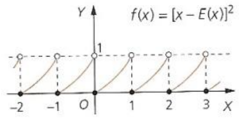
- Una función es **continua** en un punto, de abscisa x_0, si se cumplen las tres condiciones siguientes:
  1. Existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0.
  2. La función está definida en x_0.
  3. Los dos valores anteriores coinciden:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Una función es **continua en un intervalo (a, b)** si lo es en todos y cada uno de sus puntos.

Continuidad de algunas funciones curiosas

- Función $f(x) = [x - E(x)]^2$



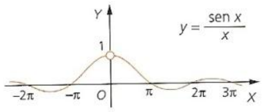
No es continua en ningún $x \in \mathbb{Z}$. Por tanto no es continua en $x = 2$, puesto que:

— $f(2) = 0$

— $\nexists \lim_{x \to 2} [x - E(x)]^2$

De igual forma en todo $x \in \mathbb{Z}$.

- Función $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$



No es continua en $x = 0$, puesto que:

— $\nexists h(0)$

— $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

10. Propiedades de las funciones continuas. Discontinuidad

- **Continuidad de las funciones elementales.** Las funciones elementales que hemos estudiado en las Unidades Didácticas 7, 8 y 9: funciones constantes, lineales, afines, cuadráticas, potenciales de exponente entero y sus inversas, exponenciales, logarítmicas, circulares y sus inversas, son continuas en los respectivos dominios de definición.

- **Operaciones con las funciones continuas.** Si f y g son dos funciones continuas en x_0, se verifica:

  — $f + g$ es continua en x_0

  — $f - g$ es continua en x_0

  — tf es continua en x_0, $\forall t \in \mathbb{R}$

  — $f \cdot g$ es continua en x_0

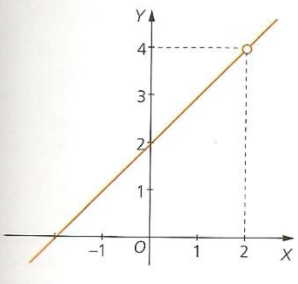
  — $\dfrac{f}{g}$ es continua en x_0, siempre que $g(x_0) \neq 0$

- **Discontinuidad.** Una función es discontinua en un punto de abscisas x_0, cuando no es continua en él, es decir, cuando falta alguna de las condiciones de continuidad.

  Los tipos más sencillos de discontinuidad son:

  — **Discontinuidad evitable.** Una función presenta discontinuidad evitable en un punto de abscisa de x_0, cuando existe el límite de la función en x_0 y no coincide con el valor de la función, o bien la función no está definida en x_0. Se evita la discontinuidad redefiniendo la función en x_0 y haciendo que en este punto tome el valor del límite.

Veamos el siguiente ejemplo:



La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ no está definida en $x = 2$, sin embargo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = 4$$

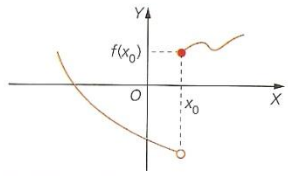
Por tanto, en $x = 2$ existe una discontinuidad evitable si redefinimos la función y hacemos que $f(x) = 4$ para $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2 & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

— **Discontinuidad no evitable.** Una función presenta discontinuidad no evitable en un punto cuando no es evitable en él.

Continuidad lateral

- **Continuidad por la derecha**

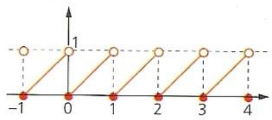


f es continua por la derecha en x_0

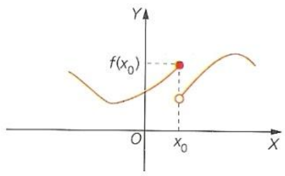
$\Updownarrow$

$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

Ejemplo: $f(x) = x - E[x]$ es una función continua por la derecha en todos los puntos de abscisa entera.



- **Continuidad por la izquierda**



f es continua por la izquierda en x_0

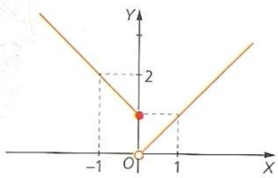
$\Updownarrow$

$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es una función continua por la izquierda en $x = 0$.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los huevos de gallina y de pata

Un huevero tiene ante sí 6 cestas con huevos. Cada una tiene huevos de una clase, de gallina o de pata. El número de huevos de cada cesta es: 6, 12, 14, 15, 23 y 29. El huevero señala una cesta y dice: «Si vendo esta cesta me quedarán doble de huevos de gallina que de pata». ¿De qué cesta habla?

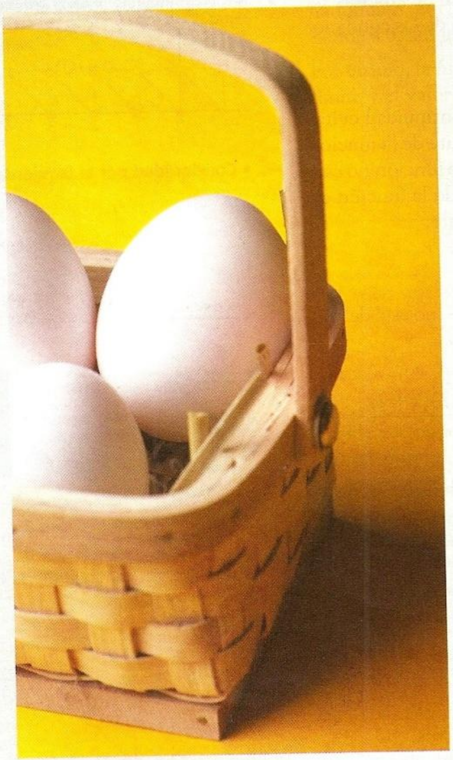
FAMILIARIZACIÓN CON EL PROBLEMA

El enunciado del problema se entiende sin dificultad.

BÚSQUEDA DE ESTRATEGIAS

Lo primero que se nos ocurre es quitar una cesta y comprobar si las cinco restantes justifican el problema. Esta técnica de tanteo se conoce con el nombre de *ensayo y error*.

LLEVAR ADELANTE LA ESTRATEGIA



Comenzamos sumando el número total de huevos de las cestas y resulta ser 99. Debe quedar doble número de huevos de gallina que de pata. El número total de huevos es múltiplo de tres; luego el número de huevos que contenga la cesta que quitemos debe ser múltiplo de tres, con el fin de que la diferencia nos quede múltiplo de tres.

Las únicas cestas cuyo número de huevos es múltiplo de tres son las de 6, 12 y 15 huevos. Practicamos el método de ensayo y error con estas cestas:

- Cesta de 6 huevos: $99 - 6 = 93 = 62 + 31$ (no podemos conseguir 31).
- Cesta de 15 huevos: $99 - 15 = 84 = 56 + 28$ (no podemos conseguir 28).
- Cesta de 12 huevos: $99 - 12 = 87 = 58 + 29$.

La cesta solución es la de 12 huevos, pues se puede conseguir:

$$29 = 23 + 6 \qquad 58 = 14 + 15 + 29$$

REVISAR EL PROCESO Y SACAR CONSECUENCIAS DE ÉL

La idea clave en la resolución de este problema ha sido darnos cuenta de que, al eliminar una cesta, la suma de los huevos de las cestas restantes ha de ser múltiplo de tres. Como la suma total de los huevos es también múltiplo de tres, la cesta eliminada ha de ser múltiplo de tres.

Al revisar las cestas que nos quedan, 6, 14, 15, 23 y 29, nos preguntamos si los 58 huevos de gallina y los 29 de pata se pueden conseguir sólo de la forma que hemos indicado.

¿Podemos enunciar problemas análogos cambiando el número de huevos de cada cesta?

Ensayo y error

La técnica de ensayo y error, muy útil en la resolución de problemas, consiste en llevar a cabo los siguientes pasos:

- Elegir un valor (resultado, operación o propiedad) posible.
- Imponer a este valor las condiciones dadas en el problema.
- Probar si hemos alcanzado el objetivo.

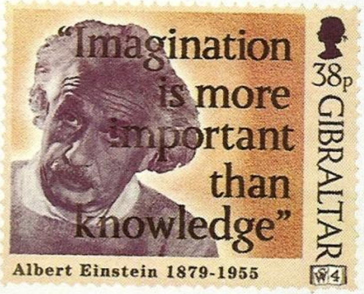
Si la respuesta al último paso es negativa, se repite todo el proceso con otro valor, y así sucesivamente, hasta encontrar o alcanzar el objetivo buscado.

Existen dos tipos de ensayo y error:

- **Ensayo y error fortuito,** cuando los valores se eligen al azar.
- **Ensayo y error dirigido,** cuando los valores se eligen de forma ordenada y son sometidos a algunas de las condiciones que impone el problema.

Cuando utilizamos la técnica de ensayo y error es conveniente contrastar cada respuesta para ver si estamos más cerca o más lejos del objetivo buscado.

En el problema de los huevos de gallina y de pata hemos usado la técnica o estrategia de ensayo y error fortuito. Enseguida nos hemos dado cuenta de cuál era la condición que debía cumplir la cesta que había que quitar, por lo que, a partir de ese momento, hemos efectuado un ensayo y error dirigido que nos ha llevado a resolver el problema.



ACTIVIDADES

- Aplica esta estrategia de ensayo y error en la resolución de los siguientes problemas.

1. **Fichas de colores.** Tenemos 16 fichas, de las cuales 4 son rojas, 4 verdes, 4 azules y 4 amarillas. De cada uno de los colores tenemos una ficha cuadrada, una circular, una triangular y otra pentagonal. Coloca estas fichas en una cuadrícula o tablero de 4×4, de manera que, en cada fila, columna o diagonal, haya una ficha de cada color y de cada forma.

2. ***Amanitas muscarias.*** Juan fue con su padre a ver una exposición micológica. Les llamó la atención el colorido de la *Amanita muscaria*. Al día siguiente, su amigo le preguntó por el número total de ejemplares que habían visto de esta variedad en la exposición, a lo que Juan respondió: «Había 8/9 de las *Amanita muscaria* más 8/9 de *Amanita muscaria*». ¿Cuántos ejemplares de *amanita* había en la exposición?

3. **Latas de zumo.** Hay un cierto número de latas de zumo en la nevera. Invitas a dos amigos a tu casa a merendar. El primero se bebe la mitad de las latas que hay en la nevera más media lata; el segundo, la mitad de las que quedan más media lata; y tú te bebes la mitad de las que quedan más media lata. Después de esto, no queda ninguna lata de zumo. ¿Cuántas latas había inicialmente?

4. **Múltiplo de doce.** Si multiplicamos el cuadrado de un número natural por el número natural anterior a ese cuadrado, ¿el resultado es múltiplo de 12?

NUEVAS TECNOLOGÍAS

Derive nos permite calcular límites de funciones, límites laterales y estudiar la continuidad de funciones dadas.

Límites con Derive

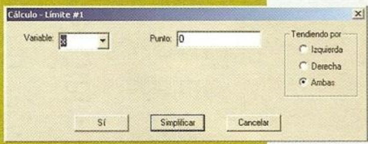
- **Cálculo de límites**

Vamos a calcular con Derive los siguientes límites:

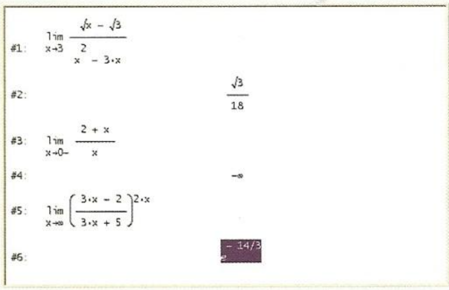
$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2-3x} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{2+x}{x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{2x}$$

Para ello seguimos estos pasos:

1. En el *Editor de Expresiones* introducimos la expresión cuyo límite queramos hallar; pulsando la tecla INTRO aparecerá esta expresión en el área de trabajo.



2. En la barra de *Menú* elegimos lím , y aparece una ventana como la de la imagen que nos permite elegir la variable, el punto en el que calcular el límite y la tendencia (izquierda, derecha o ambas). En nuestro caso hemos elegido *ambas* para el primero y tercer límite e *izquierda* para el segundo.
3. Pulsando Simplificar aparece el resultado del límite en el área de trabajo, como puedes ver en esta imagen.



- **Estudio de la continuidad de una función**

Derive permite estudiar la continuidad de una función en un punto utilizando el cálculo de límites laterales en ese punto, e incluso posibilita la representación gráfica de la función.

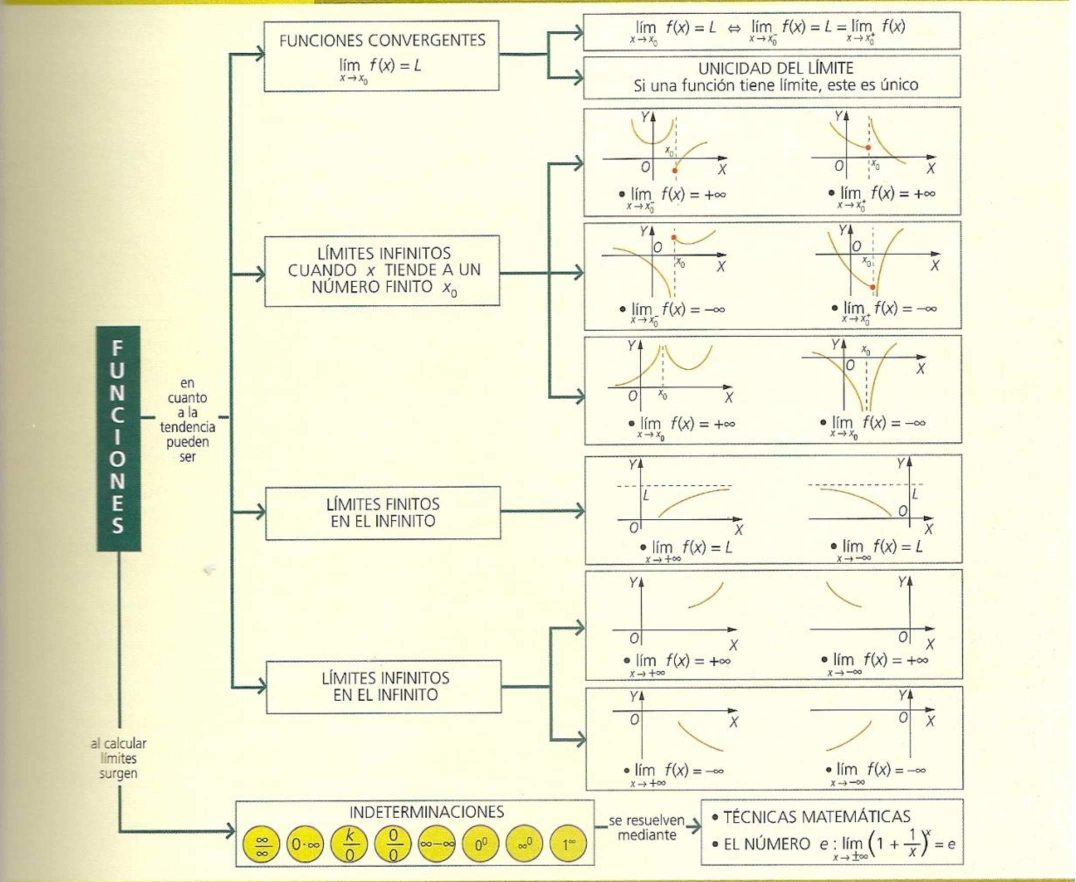
Así para estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x<2 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

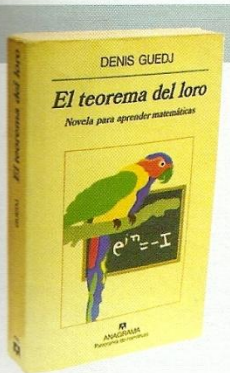
Introducimos la función en el *Editor de Expresiones*, hallamos sus límites laterales en 2 y observamos que son distintos, por lo que la función dada no es continua en ese punto.

PRACTICA con Derive la resolución de las actividades número 9, 11, 13 y 21.

EN RESUMEN



AMPLÍA CON...



El teorema del loro (editorial Anagrama) de *Denis Guedj*, es una novela de intriga que trata de resolver un enigma matemático.

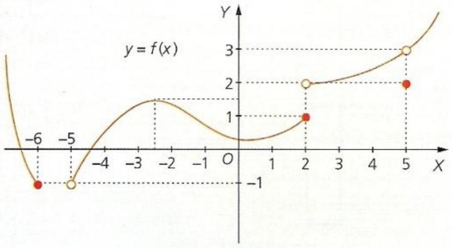
Todo comienza cuando un niño de doce años, Max, rescata a un loro parlanchín, llamado Sin Futuro, y lo instala en su casa.

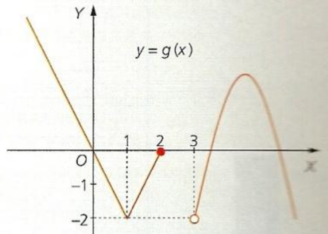
En la novela se mezclan las aventuras que viven sus personajes con diálogos entre ellos en los que se desgrana la historia de las matemáticas mientras intenta resolver el enigma.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:





a) $f(2)$ e) $f(5)$ i) $f(-5)$ m) $\lim\limits_{x\to-2,5} f(x)$ q) $g(2)$ t) $g(2,5)$

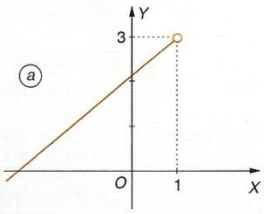
b) $\lim\limits_{x\to-5^-} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to-5^+} f(x)$ j) $f(-6)$ n) $g(1)$ r) $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)$ u) $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)$

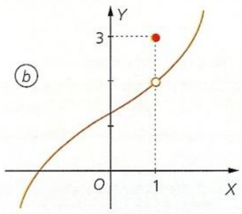
c) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ g) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ k) $\lim\limits_{x\to-6^-} f(x)$ o) $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ s) $\lim\limits_{x\to3^-} g(x)$ v) $\lim\limits_{x\to3} g(x)$

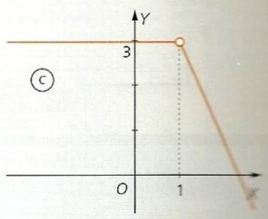
d) $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)$ h) $\lim\limits_{x\to-2,5^+} f(x)$ l) $\lim\limits_{x\to5^-} f(x)$ p) $\lim\limits_{x\to3^+} g(x)$

2. Identifica cada una de las tres expresiones siguientes con su gráfica correspondiente:

$\nexists \lim\limits_{x\to1^+} g(x)=3$ $\lim\limits_{x\to1} g(x)=3$ $g(1)=3$







3. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=-2$; $f(2)=5$; Dom $f=R$; Im $f=(-2,+\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to1} g(x)=4$; $g(x)$ estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$; Im $g=(-\infty, 4]$

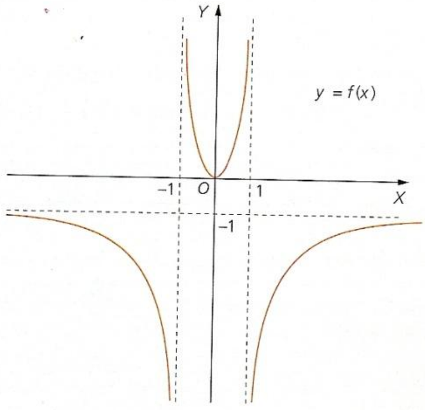
c) $\lim\limits_{x\to2^-} h(x)=3$; $\lim\limits_{x\to2^+} h(x)=5$; $h(2)=3$; Dom $h=[0, 3]$

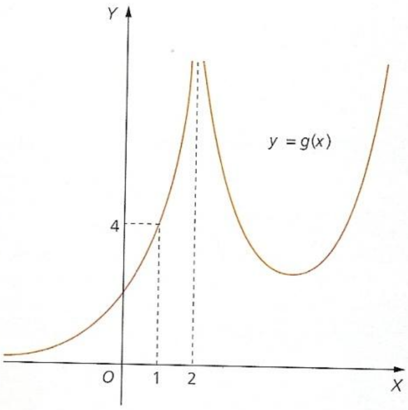
d) $\lim\limits_{x\to-1} t(x)=\lim\limits_{x\to0} t(x)=\lim\limits_{x\to1} t(x)$

e) $l(x)>0 \quad \forall x>2$; $l(x)\le0 \quad \forall x<2$; $\nexists \lim\limits_{x\to2} l(x)$

f) Dom $n=\mathbb{R}-(2,3]$; Im $n=\mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to2^-} n(x)=0$; $\lim\limits_{x\to3^+} n(x)=-2$; $n(0)=0$

4. En las siguientes funciones, cuyas gráficas se dan, calcula los valores pedidos:





a) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$

b) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

d) Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, si es que existen.

e) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

f) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

g) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

h) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$

i) $\lim_{x \to 2} g(x)$

j) $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

k) Ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales, si es que existen.

l) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$

m) $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

n) $\lim_{x \to 1} g(x)$

5. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

a) Asíntota vertical en $x = -2$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \to 1} g(x) = 1$; $\lim_{x \to 3^+} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 3^-} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

c) $h(-4) = 2$; $\lim_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -2^+} h(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 2^-} h(x) = 2$; $\lim_{x \to 2^+} h(x) = -1$

d) $t(0) = 1$; $\lim_{x \to 0^+} t(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 2} t(x) = 2$; $\lim_{x \to 3^-} t(x) = \lim_{x \to 3^+} t(x) = +\infty$

6. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 0} 2$

b) $\lim_{x\to +\infty} x^{-5}$

c) $\lim_{x\to -3} \frac{1}{x^2}$

d) $\lim_{x\to -\infty} x^5$

e) $\lim_{x\to -\infty} (-7)$

f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{10}}$

g) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^{10}}$

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{13}}$

i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{13}}$

j) $\lim_{x\to -1} x^6$

k) $\lim_{x\to 0^-} x^3$

l) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}$

m) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^7}$

n) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^7}$

o) $\lim_{x\to -\infty} x^6$

p) $\lim_{x\to 1} x$

ACTIVIDADES FINALES

7. Dada la función f, calcula:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si} \quad x<-1\\ -3 & \text{si} \quad -1\le x<2\\ x+1 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Comprueba los resultados obtenidos por medio de la gráfica.

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} [2x^3-7x+2]$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{3x^2-5x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} [4x^4-7x+5]$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} [-3x^5+2x-4]$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^2-5x+1}{2x^3-3}$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-7x+5}{-2x^2+4x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+7}}{2x}$

h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^4-7x}{4x^2+5}$

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x+2}{\sqrt{x^2+2}+x}$

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x^3-2x^2+x}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{5x^2-13x-6}$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4-1}{x^3+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{2x-6}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{2x}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+2}-2}$

10. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} [\sqrt{x^2+3}-x]$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{2}{x^3}\cdot\dfrac{x^2+2x}{3}\right]$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} [\sqrt{9x^2+4x}-\sqrt{9x^2-2}]$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{x^2}{x+2}-\dfrac{x^3-1}{x^2+2}\right]$

11. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right]^{\frac{x^2}{2}}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{4-3x}{5-3x}\right]^{x-3}$

12. Halla las asíntotas, si las tienen, de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$

b) $g(x)=\dfrac{3x}{x^2-4}$

c) $h(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$

d) $k(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

e) $m(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

f) $r(x)=\dfrac{x^2-4}{x}$

13. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{3}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0^-} 3^{\frac{1}{x}}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{4x^2-6x+3}-2x]$ d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^3+4x^2-2x-4}{2x^2+x-3}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} [1+3x]^{\frac{2}{x}}$

14. Un estudio biológico establece que el número de animales de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función:

$$F(t) = \frac{15\,000\,t + 10\,000}{2t+2} \quad (t \text{ son años transcurridos})$$

Halla:

a) El tamaño actual de la población.

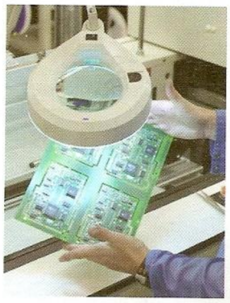
b) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Si es así, ¿en qué número de individuos?

15. La siguiente función muestra los beneficios en miles de euros de un banco en función del tiempo x desde que abrió sus puertas.

$$f(x) = \frac{60\,x + 810}{x^2+9} \quad (x \text{ en años})$$

¿Qué pasa con los beneficios cuando el tiempo se hace infinitamente grande?

16. El número de montajes $M(t)$ por día de un determinado artículo que un trabajador realiza en función del número de días, t, de entrenamiento viene dado por:



$$M(t) = \frac{600\,t + 120}{t+3}$$

a) Halla el número de montajes que realiza al empezar a trabajar con ese artículo.

b) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{t \to -3^+} \frac{600\,t+120}{t+3} \qquad \lim_{t \to +\infty} \frac{600\,t+120}{t+3}$$

c) ¿Cuántos días debe entrenar para conseguir hacer 500 montajes? ¿Cuál es el máximo número de montajes que puede hacer estando muy entrenado?

17. La función $C(x) = \frac{3x+60}{x}$ indica el coste, en euros, de producción de cada pieza de un determinado producto en función del número, x, de piezas producidas. Encuentra las asíntotas de esta función y las tendencias con sentido en el contexto del problema.

18. La puntuación obtenida por un estudiante en un test dependiendo del tiempo (x en horas) que ha dedicado al estudio viene dada por:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{2x}{5} & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ \frac{3x}{0{,}5x-2{,}5} & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

Razona que la puntuación obtenida no puede ser superior a 8.

ACTIVIDADES FINALES

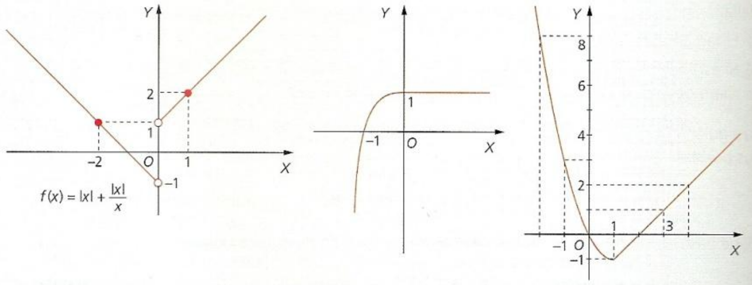
19. Dada la función f, calcula:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x<0 \\ 3-3x & \text{si} \quad 0\le x<3 \\ -2x & \text{si} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$; $f(0)$; $f(1)$ y $f(3)$.

A la vista de los resultados obtenidos, estudia la continuidad de esta función.

20. En las siguientes funciones, calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$. Estudia su continuidad en las respectivas tendencias de x.



$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x>0 \\ -x-1 & \text{si } x<0 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x\ge 0 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si } x\le 1 \\ x-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

21. Obtén las gráficas de las funciones siguientes y calcula los límites indicados:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 0 \\ -2 & \text{si } x>0 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) $g(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to 2-} g(x)$; $\lim\limits_{x\to 2+} g(x)$

c) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x\le 1 \\ 2-x & \text{si } x>1 \end{cases}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 1-} h(x)$; $\lim\limits_{x\to 1+} h(x)$

Estudia la continuidad de estas funciones en los puntos que se indican:

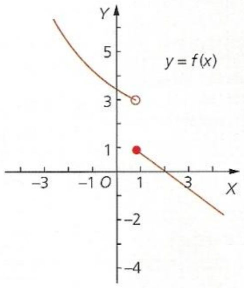
$f(x)$ en $x=0$; $g(x)$ en $x=2$; $h(x)$ en $x=1$.

22. Estudia la continuidad de las siguientes funciones definidas a trozos:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{si} \quad x<2 \\ x-2 & \text{si} \quad 2\le x\le 4 \\ 5 & \text{si} \quad x>4 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{x-5} & \text{si} \quad x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si} \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{10}{x+2} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. En la gráfica de la función $y = f(x)$ se cumple que:



a) $f(1) = 3$ b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

2. La solución de $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 - 18}{x^2 - 3x}$ es:

a) 4   b) 2   c) −4

3. Al resolver $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 - x^2}{4x^2 + 5x}$ obtenemos:

a) $\dfrac{1}{4}$ b) 0   c) $-\dfrac{1}{4}$

4. El resultado de calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x} - 1}$ es:

a) −6   b) 6   c) $+\infty$

5. La función $f(x) = \left(\dfrac{2x + 3}{2x - 1}\right)^{5x}$ cuando x se hace infinitamente grande tiende a:

a) e^{-10} b) e^{10} c) e^5

6. La función $f(x) = \dfrac{x + 4}{3x + 2}$ tiene una asíntota vertical de ecuación:

a) $y = \dfrac{1}{3}$ b) $x = -4$ c) $x = -\dfrac{2}{3}$

7. La asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{3 - 2x^2}{x^2 - 1}$ tiene de ecuación:

a) $y = -2$ b) $y = 2$ c) $x = 1$

8. La función $y = 100\left(10 + 8x + \dfrac{121}{x}\right)$ tiene una asíntota oblicua de ecuación:

a) $y = 800x + 1\,000$ b) $y = 800x - 1\,000$ c) $y = 800x$

9. La función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ es discontinua en:

a) $x = -1$ b) $x = 1$ c) $x = 0$

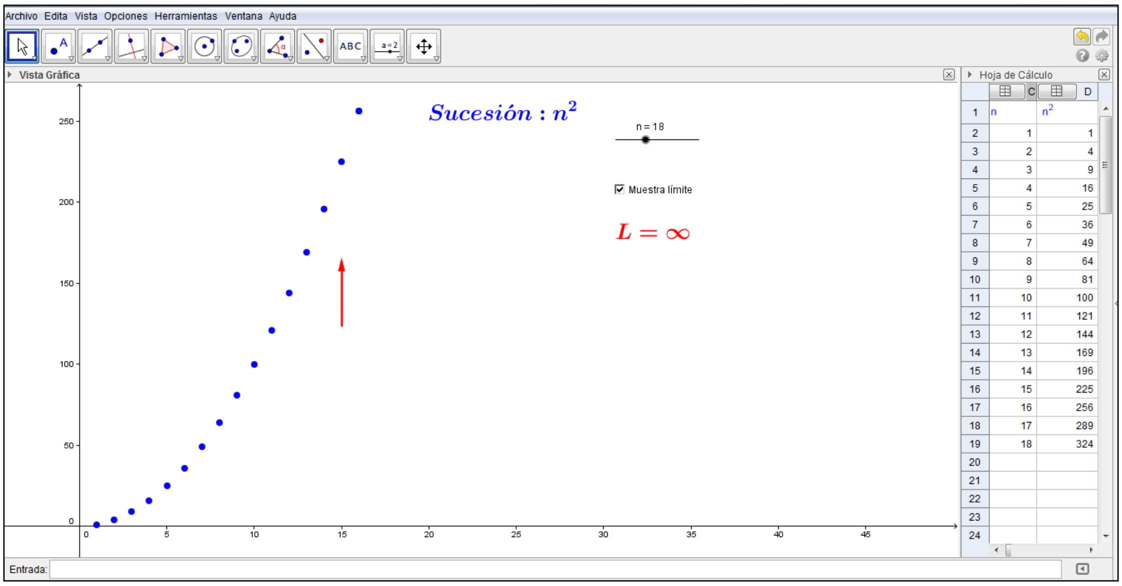
10. La paga mensual, en euros, que una familia da a su hijo depende del sueldo x, en miles de euros, que cobran mensualmente los padres según la función:

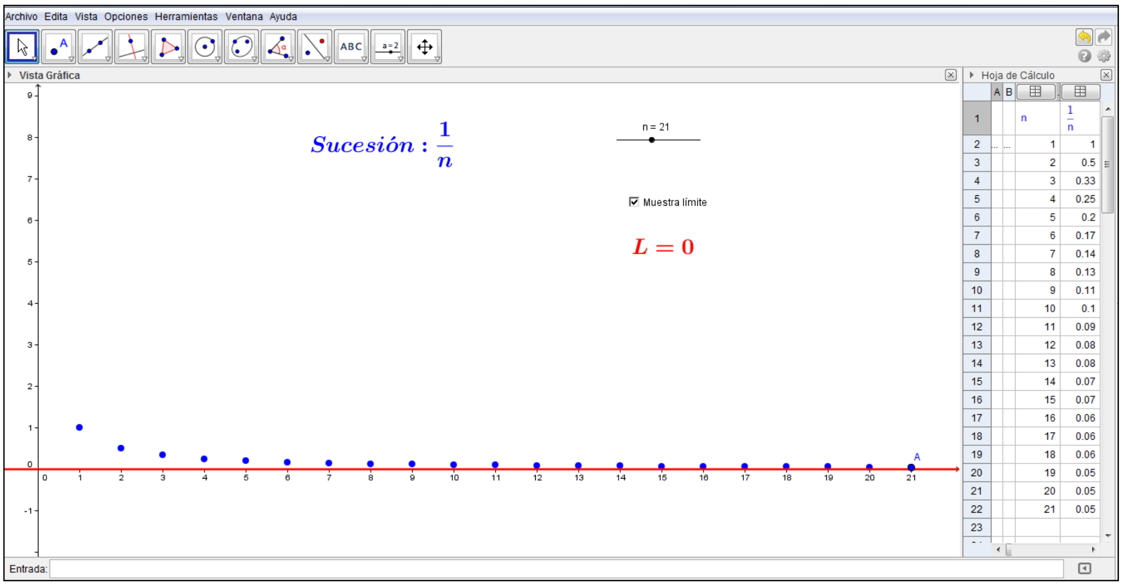
$$P(x) = \frac{500x}{2x + 25}$$

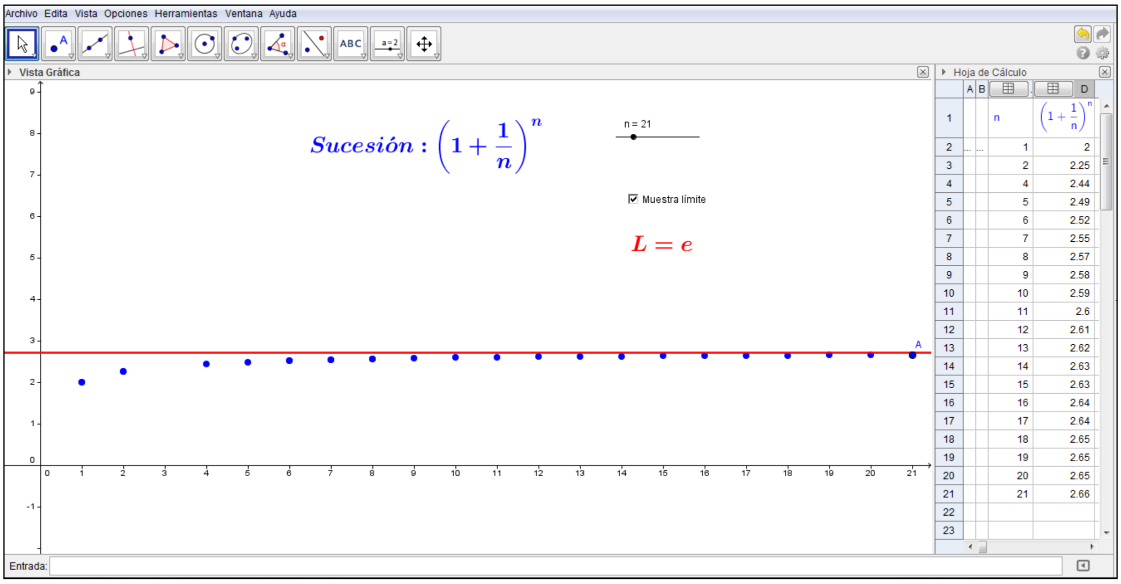
Esta paga tiende a estabilizarse en:

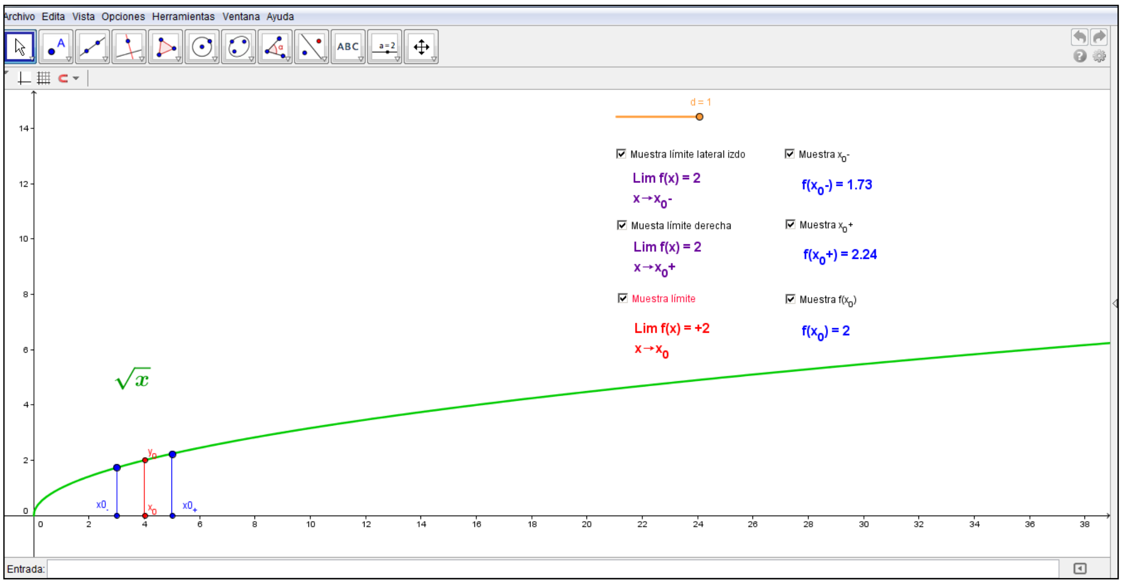
a) 500 euros   b) 25 euros   c) 250 euros

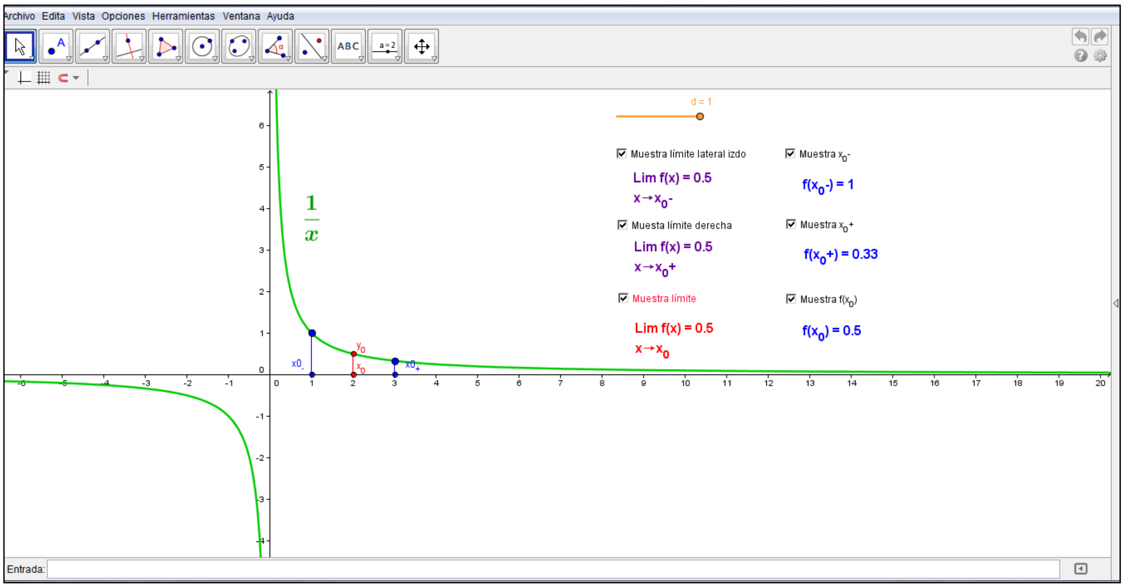
B. REPRESENTACIONES DINÁMICAS CON GEOGEBRA






Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Vista Gráfica
Hoja de Cálculo
Sucesión : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
n = 21
Muestra límite
$L = e$
n
1 1 2
2 2 2.25
3 4 2.44
4 5 2.49
5 6 2.52
6 7 2.55
7 8 2.57
8 9 2.58
9 10 2.59
10 11 2.6
11 12 2.61
12 13 2.62
13 14 2.63
14 15 2.63
15 16 2.64
16 17 2.64
17 18 2.65
18 19 2.65
19 20 2.65
20 21 2.66
Entrada:


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
d = 1
Muestra límite lateral izdo
Lim f(x) = 2
x→x0-
Muestra x0-
f(x0-) = 1.73
Muestra límite derecha
Lim f(x) = 2
x→x0+
Muestra x0+
f(x0+) = 2.24
Muestra límite
Lim f(x) = +2
x→x0
Muestra f(x0)
f(x0) = 2
$\sqrt{x}$
Entrada:


Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
d = 1
Muestra límite lateral izdo
Lim f(x) = 0.5
x→x0-
Muestra x0-
f(x0-) = 1
Muestra límite derecha
Lim f(x) = 0.5
x→x0+
Muestra x0+
f(x0+) = 0.33
Muestra límite
Lim f(x) = 0.5
x→x0
Muestra f(x0)
f(x0) = 0.5
$\frac{1}{x}$
Entrada:

C. APUNTES DEL TEMA DE LÍMITES

1. Sucesiones. Límite de una sucesión

Límite de una sucesión:

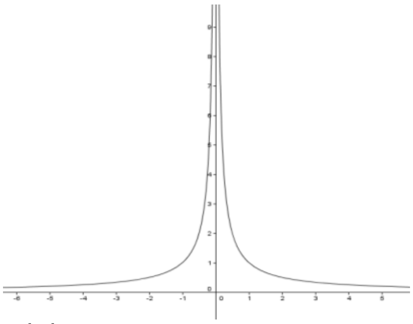
El límite de una sucesión de números reales, de término general a_n, es un número real L cuando, para valores muy grandes de n, los términos correspondientes de la sucesión se aproximan a él. Esto se escribe como:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L$$

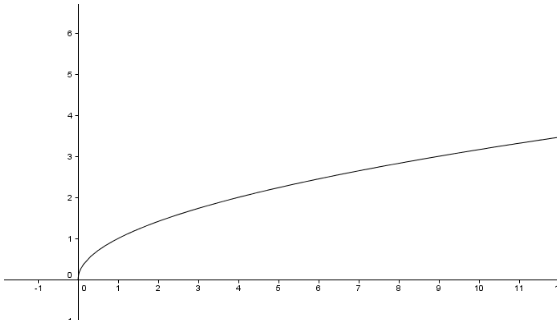
Ejemplos:

a) n^2 b) $1/n$ c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

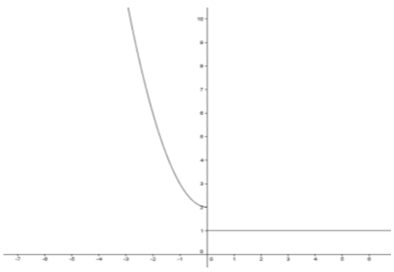
2. Definición de límite. Límites laterales



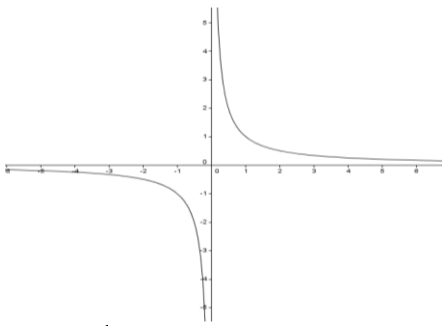
$f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$



$g(x) = \sqrt{x}$



$h(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$



$n(x) = \dfrac{1}{x}$

2.1 Límites laterales

Una función f(x) tiene por límite L cuando x tiende a x_0 **por la izquierda** si al dar valores a x próximos a x_0 y menores que x_0, los correspondientes valores que toma la función f(x) se aproximan a L.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Una función f(x) tiene por límite L cuando x tiende a x_0 **por la derecha** si al dar valores a x próximos a x_0 y mayores que x_0, los correspondientes valores que toma la función f(x) se aproximan a L.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

2.3 Límite de la función en un punto

Una función f(x) tiene límite cuando x tiende a x_0 si tiene límite por la derecha y por la izquierda cuando x tiende a x_0 y ambos coinciden.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \end{cases}$$

Función convergente en un punto x_0

$$f\ convergente\ en\ x_0 \Leftrightarrow\ \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L\ \ y\ L \in \mathbb{R}$$

En caso contrario, se dice que f es divergente en x_0.

Límites infinitos:

Se dan si cuando x tiende a x_0, la función toma valores cada vez más grandes a medida que nos aproximamos a x_0. En este caso se cumple que:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \qquad ó \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

2.3 Límites en el infinito

Hasta ahora, se han analizado los límites cuando x tiende x_0 y siempre x_0 ha representado un número real. A continuación, se analiza el comportamiento de la función "en el infinito" ($x \to +\infty\ o\ x \to -\infty$). Los límites en el infinito de la función se expresan de la siguiente manera:

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$, cuando la x se hace muy grande. $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, cuando la x se hace muy pequeña.

3. Cálculo de límites

3.1 Regla I

Normalmente, basta con sustituir el valor de x_0 en la función. El resultado será un número real y el ejercicio estará terminado.

Ejemplo:
$\lim_{x \to 1} 2x + 1$

Ejercicios

1. $\lim_{x \to +3} 2$
2. $\lim_{x \to 0} 2x + 9$
3. $\lim_{x \to 4} x^2 + 1$
4. $\lim_{x \to -1} x^3$
5. $\lim_{x \to +\infty} x + 5$
6. $\lim_{x \to -\infty} x^2$
7. $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x+6}$
8. $\lim_{x \to -3} \frac{x-6}{x-9}$
9. $\lim_{x \to -\infty} x^5 + 5$
10. $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^{10}}$
11. $\lim_{x \to +\infty} \frac{-5}{x^7}$

3.2 Operaciones con funciones

$Sea \lim_{x\to x_0} f(x) = L \ y \lim_{x\to x_0} g(x) = M$

- $\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = L \pm M$
- $\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = L \cdot M$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M} \quad si que\, M \neq 0$
- $\lim_{x\to x_0} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[p]{L}$
- $\lim_{x\to x_0} (f(x))^p = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^p = L^p$
- $\lim_{x\to x_0} \log_a f(x) = \log_a \lim_{x\to x_0} f(x) = \log_a L \ con\, L > 0$
- $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim_{x\to x_0} g(x)} \quad si\, L \neq 0\, y\, M \neq 0$

Ejercicios

12. $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x^2}$
13. $\lim_{x\to 5} \sqrt{x-2}$
14. $\lim_{x\to 100} log\, x$
15. $\lim_{x\to -6} |x+4|$
16. $\lim_{x\to -\infty} 3^x$
17. $\lim_{x\to 0} -2^x$
18. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Puede ocurrir que no valga con sustituir en la función cuando x_0 no pertenece al dominio de esta, cuando es un punto extremo del dominio o cuando delimita alguno de los intervalos con los que se define una función a trozos. En estos casos, habrá que estudiar los límites laterales o resolver indeterminaciones.

Ejercicios

19. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$
20. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$
21. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$
22. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}$
23. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2}$
24. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$
25. $\lim_{x\to 4} \frac{5}{x-4}$
26. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}$
27. $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x-1}$
28. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x-1}$
29. $\lim_{x\to -4^+} log\,(x+4)$
30. $\lim_{x\to -4^-} log\,(x+4)$
31. $\lim_{x\to -4} log\,(x+4)$
32. $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & si\ x<0 \\ 2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$

3.3 Expresiones determinadas

- $\pm\infty + k = \pm\infty \qquad , k \in \mathbb{R}$
- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$
  $(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$
  $(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

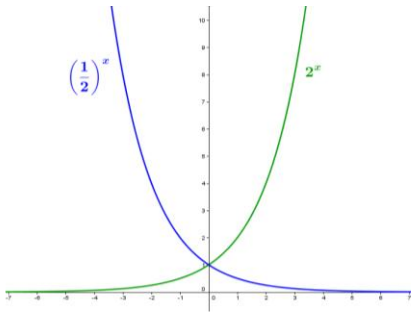
- $k(\pm\infty) = \pm\infty \quad ,k > 0$
- $k(\pm\infty) = \mp\infty \quad ,k < 0$
- $\frac{k}{\pm\infty} = 0$
- $\frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty \quad ,k > 0$
- $\frac{\pm\infty}{k} = \mp\infty \quad ,k < 0$

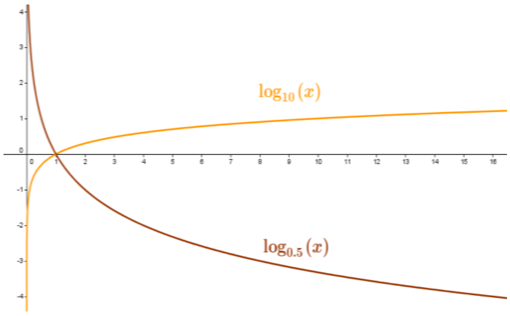
- $si\ k \in (0,1) \Longrightarrow\ k^{+\infty} = 0$
- $si\ k > 1 \Longrightarrow\ k^{+\infty} = +\infty$
- $si\ k < 0 \Longrightarrow\ k^{+\infty} = \nexists$

- $\frac{0}{k} = 0 \quad ,k \in \mathbb{R} - \{0\}$

- $(+\infty)^k = +\infty \quad ,k > 0$
- $(+\infty)^k = 0 \quad ,k < 0$
- $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
- $(+\infty)^{-\infty} = 0$

- $si\ a \in (0,1) \Longrightarrow\ log_a +\infty = -\infty$
- $si\ a > 1 \Longrightarrow\ log_a +\infty = +\infty$





3.4 Regla II

Las funciones polinómicas cuando x tiende a $+\infty$ ó $-\infty$, se comportan del mismo modo que su término de mayor grado.

Ejercicios

33. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^2 + 2x + 5)$
34. $\lim\limits_{x\to-\infty} (-10x^3 + 6x^2)$
35. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\frac{2}{3}x^{10} - x^3\right)$
36. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^9 - x^4 - 100)$

3.5 Regla III

Cuando al aplicar la regla I, el resultado obtenido no tiene sentido, aparecen las indeterminaciones que son expresiones de este tipo:

$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \cdot \infty$	$\frac{k}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\infty - \infty$	0^0	∞^0	1^∞

3.6 Resolución de indeterminaciones

- **Tipo** $\frac{k}{0}$

Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones y se resuelven estudiando los límites laterales.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x} = \frac{1}{0} = Indeterminación$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Comprobamos que en este caso, $\frac{1}{0}$ puede ser $-\infty$ ó $+\infty$ y por lo tanto, es una indeterminación.

Ejercicios

37. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2}{x-1}$

38. $\lim_{x\to -2} \frac{3x^2-3x}{(x+2)^3}$

- **Tipo** $\frac{\infty}{\infty}$

Aparecen al calcular límites de funciones que son cocientes de funciones polinómicas y/o irracionales (raíces). Se resuelven dividiendo el numerador y denominador por la máxima potencia.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = Ind$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = Ind$$

Se obtiene que el primer límite es 2 mientras que el segundo vale 0. Es decir, el símbolo $\frac{\infty}{\infty}$ es una indeterminación ya que el límite adopta diferentes valores.

Ejercicios

39. $\lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{x+1}$

40. $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+1}$

41. $\lim_{x\to +\infty} \frac{(x+2)(x+5)}{(x+4)^2}$

42. $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^5-7x^2+2}{-5x^3-6x^2+1}$

43. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^4+7}}{-10x^2}$

44. $\lim_{x\to +\infty} \frac{-3x^2}{\sqrt{x^3+1}+x}$

45. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3-1}}{x+5}$

- **Tipo** $\mathbf{\frac{0}{0}}$

Aparecen al calcular límites de cocientes de funciones polinómicas o irracionales (raíces). El primer caso se resuelve factorizando los polinomios numerador y denominador. El segundo caso, se resuelve multiplicando el numerador y denominador por la expresión conjugada de la función que lleve raíz.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0} = Ind$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0} = Ind$$

Ejercicios

46. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^2-3x+2}$

47. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

48. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$

49. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$

- **Tipo $\mathbf{0 \cdot \infty}$**

Este tipo de indeterminación se resuelve transformándolas en las de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ó $\frac{0}{0}$.

Ejercicios

50. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} \cdot \sqrt{x^2 + 3}$

51. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 5)\sqrt{\frac{3x}{4x^2 + 3}}$

- **Tipo $\infty - \infty$**

Aparecen al calcular límites de diferencias de funciones racionales o irracionales. El primer caso se resuelve operando y el segundo, multiplicando el numerador y denominador por la expresión conjugada.

Ejercicios

52. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2}$

53. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 5x} - 2x\right)$

54. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4}{x^2 + 1} + \frac{-x^3 + 2}{x}\right)$

55. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + 4x} - \sqrt{9x^2 - 2}\right)$

- **Tipo $\mathbf{1^{\infty}}$**

Este tipo de indeterminaciones se resuelven teniendo en cuenta que el límite cuando n tiende a $+\infty$ de la sucesión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es el número e. Es decir:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ejercicios

56. $lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

57. $lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x+2}\right)^{3x+2}$

58. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x+2}\right)^{4(3x+2)}$

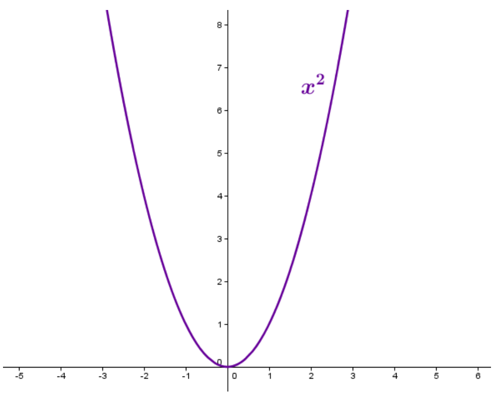
59. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x + 2}\right)^7$

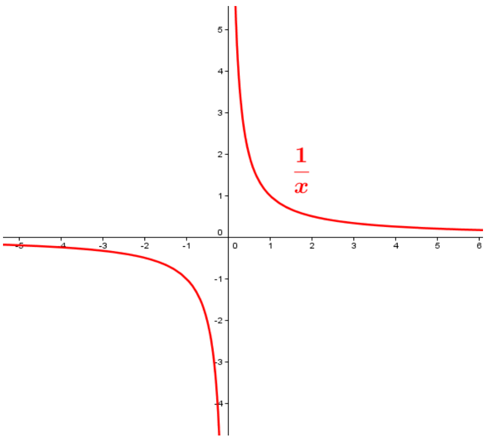
60. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{4x}{3x + 2}\right)^7$

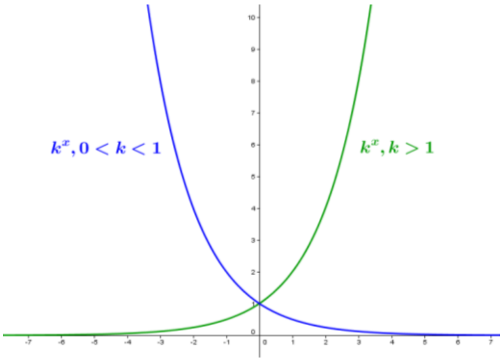
61. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{3x^2 - 2x}\right)^{2x}$

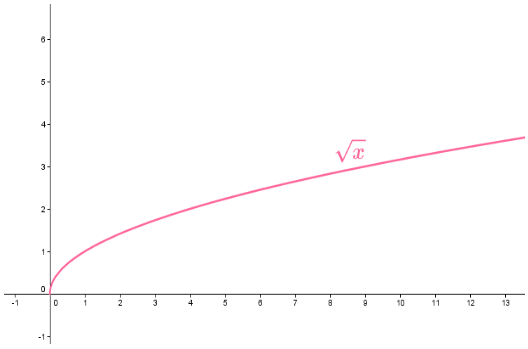
62. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3x - 5}{3x - 2}\right)^{2x^2}$

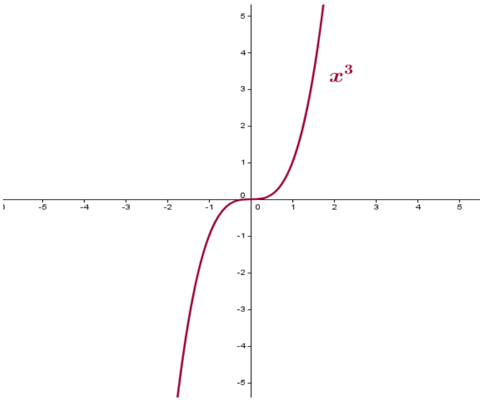
4. Alfabeto de funciones

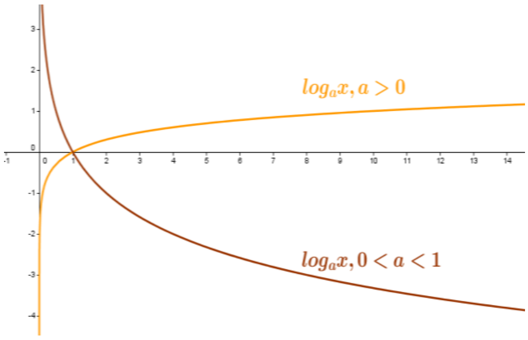




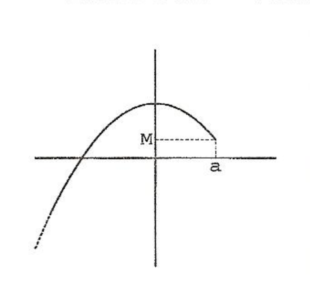
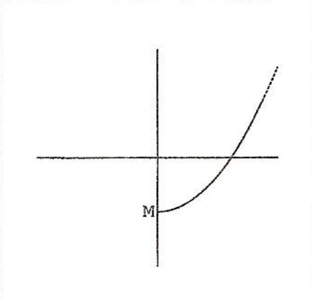
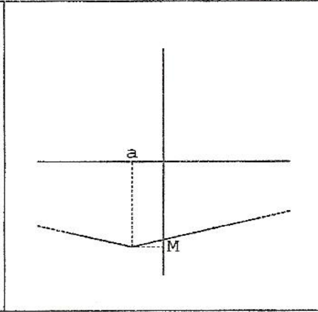


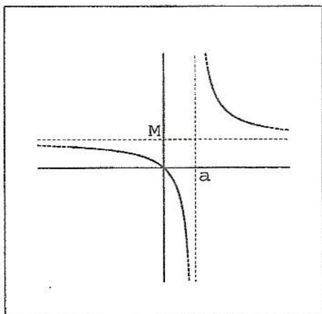
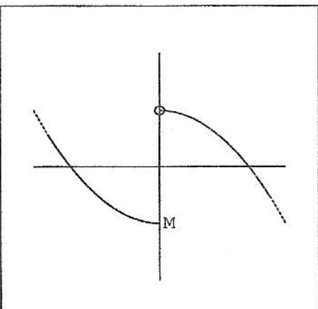
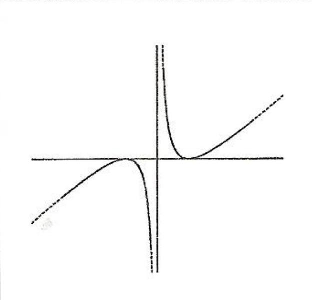






5. Ficha de límites (I)

		
$\lim_{x\to a^+} f(x) =$ $\lim_{x\to a^-} f(x) =$ $\lim_{x\to a} f(x) =$ $\lim_{x\to \infty} f(x) =$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ $\lim_{x\to 0} f(x) =$ $\lim_{x\to \infty} f(x) =$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to a^+} f(x) =$ $\lim_{x\to a^-} f(x) =$ $\lim_{x\to a} f(x) =$ $\lim_{x\to \infty} f(x) =$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

		
$\lim_{x\to a^+} f(x) =$ $\lim_{x\to a^-} f(x) =$ $\lim_{x\to a} f(x) =$ $\lim_{x\to \infty} f(x) =$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ $\lim_{x\to 0} f(x) =$ $\lim_{x\to \infty} f(x) =$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$	$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$ $\lim_{x\to 0} f(x) =$ $\lim_{x\to \infty} f(x) =$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) =$

6. Ficha de límites (II)

Calcula los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} x^{-13}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^6}$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-5}$
5. $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & si\ x < -1 \\ -3 & si -1 \le x < 2 \\ x+1 & si\ x \ge 2 \end{cases}$

   $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$
   $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$
   $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
   $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
   $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
   $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
   $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
   $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_2(x+5)$
7. $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x^3 - 7x + 2)$
8. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{2}{3x^3 - 5x + 2}\right)$
9. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x+2} - \frac{x^3}{x^2+1}\right)$
11. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{2x^2 - 7x + 5}{-11x^2 + 4x - 3}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to -2} \log_2(2+x)$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - x\right)$
14. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}\right)$
15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^7 + x^5 + x^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^x}\right)$
16. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x+2} - 2}\right)$
17. $\lim\limits_{x\to 10} \sqrt{x - 10}$
18. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1-x} - 1}{2x}\right)$
19. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6x+2}{\sqrt{x^2+2} + x}$
20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{-x-2}{-x+3}\right)^{3x}$
21. $\lim\limits_{x\to +\infty} 0.8^x$
22. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{x^3} \cdot \frac{x^2 + 2x}{3}\right)$
23. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2}\right)$
24. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{2x^2 - 6x}{2x^2 - x - 5}\right)^{3x}$
25. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{4 - 3x}{5 - 3x}\right)^{x-3}$
26. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 6x + 3} - 2x\right)$
27. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^3 + 4x^2 - 2x - 4}{2x^2 + x - 3}$
28. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$

D. **ENCUESTA**

Sexo: Hombre / Mujer **Edad:** ___________

1. **Te ha gustado el tema de límites:**

Sí, mucho ( ) Poco ( ) - Bastante ( ) -Muy poco o nada ( )
-

2. **Valoración del docente**

El profesor/a…	1	2	3	4	5
Explica con claridad					
Tiene un trato respetuoso					
Es agradable					
Atiende tus dudas de manera eficaz					
Hace las clases amenas					
Me estimula a pensar					
Me ayuda a corregir errores de comprensión					

En general estoy contento/a con el profesor/a

Sí, mucho ( ) Poco ( ) - Bastante ( ) -Muy poco o nada ( )
-

3. **Valoración de la metodología (uso de Geogebra y apuntes)**

	1	2	3	4	5
Te ha gustado el programa utilizado para la representación gráfica de los limites					
Este programa te ayudó a entender el concepto de límite					
Este tipo de sesión con este programa te pareció útil					
Recomendarías que se repitiese este tipo de sesión con futuros alumnos					
Los apuntes del tema de límites te parecieron que estaban bien hechos					
Te resultaron útiles los apuntes del tema de límites					
Prefiero coger los apuntes de la pizarra					

En general estoy contento/a con las clases de límites:

Sí, mucho ( ) Poco ( ) Bastante ( ) Muy poco o nada ( )

4. Técnicas de estudio:

-

Yo suelo estudiar matemáticas…	
Repitiendo una y otra vez los ejercicios de clase	
Aprendiendo de memoria lo que no entiendo	
No estudiando lo que sospecho que el profesor no va a preguntar	
Volviendo a repasar lo que no entiendo bien hasta entenderlo	
Dejando sin estudiar lo que no entiendo	

5. El año siguiente vas a seguir en bachiller:

Sí No

En caso afirmativo, tu opción va a tener la asignatura de matemáticas:

Sí No

6. Comentario libre:

E. **TRABAJO COLABORATIVO**

1. Razona si existe o no el límite de la función f(x) en x=2, en x=3 y en x=4:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} + \frac{x+3}{x-2}$$

2. Calcula $\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x-1}$ si m=2 y m=3. ¿Puedes determinar el límite para un valor m cualquiera?

3. Un estudio biológico establece que el número de animales de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, durante los próximos años, por la función:

$$F(t) = \frac{15000t + 10000}{2t + 2}$$

Halla:
a) El tamaño actual de la población
b) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? Si es así, ¿en qué número de individuos?

4. Calcula estos límites:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{3x+3}\right)^x$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x+1}}$$

5. La puntuación obtenida por un estudiante en un test dependiendo del tiempo (x en horas) que ha dedicado al estudio viene dada por:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{2x}{5} & si\ 0 \le x \le 20 \\ \frac{3x}{0.5x - 2.5} & si\ x > 20 \end{cases}$$

Razona que la puntuación obtenida no puede ser superior a 8.

F. PLANTILLA DE ERRORES

<table>
<tr><th colspan="4">Errores conceptuales</th></tr>
<tr><td colspan="3">Se equivoca con el tipo de indeterminación</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde expresión determinada con indeterminación</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Confunde indeterminación con expresión determinada</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="8">Confunde el valor de las expresiones determinadas</td><td colspan="2">$\frac{0}{k} = \infty, \quad k \neq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{k}{\infty} = \infty, \quad k \neq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{k}{0} = p, \quad k, p \neq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$k^{+\infty} = +\infty, \quad 0 < k < 1$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$k^{-\infty} = -\infty, \quad k > 1$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{k}{0^-} = +\infty, \quad k \neq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{k}{\infty} = k, \quad k \neq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{0}{k} = k, \quad k \neq 0$</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">Errores metodológicos</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Selección</td><td colspan="2">No aplica técnica</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Aplica técnica incorrecta</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="16">Aplicación</td><td rowspan="4">Límites laterales</td><td>Si es $\lim_{x \to x_0}$, hacen $x \to 0^{+/-}$ en vez de $x \to {x_0}^{+/-}$</td><td></td></tr>
<tr><td>No estudia límites laterales (función a trozos)</td><td></td></tr>
<tr><td>Selecciona mal el trozo (función a trozos)</td><td></td></tr>
<tr><td>Realiza los límites laterales pero no concluye</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Multiplicar por el conjugado</td><td>Sólo multiplica el numerador o denominador</td><td></td></tr>
<tr><td>Calcula mal el conjugado</td><td></td></tr>
<tr><td>Aplica la propiedad distributiva al conjugado y no continúa</td><td></td></tr>
<tr><td>El signo del conjugado es distinto en el numerador y denominador</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">Dividir por el de mayor grado</td><td>Elige mal el grado</td><td></td></tr>
<tr><td>Divide el numerador con diferente exponente que el denominador</td><td></td></tr>
<tr><td>Divide lo que hay en el interior de la raíz con diferente exponente</td><td></td></tr>
<tr><td>Sólo divide el numerador o denominador</td><td></td></tr>
<tr><td>Divide sólo algunos términos por la x elevada al mayor exponente pero acompañada de su coeficiente</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Regla II
($\lim_{x \to \infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \lim_{x \to \infty} a_n x^n$)</td><td>Sustituye en todos los términos del polinomio</td><td></td></tr>
<tr><td>La utiliza con funciones radicales</td><td></td></tr>
<tr><td>Factorizar</td><td>Intenta factorizar una raíz</td><td></td></tr>
</table>

Procedimentales-desarrollo	Aplica regla correcta pero ante resultado no satisfactorio u otra indeterminación, aplica regla incorrecta	
	Resuelve indeterminación y no continúa o se equivoca en pasos posteriores	
	No realiza el último paso por no saber a qué equivale la expresión hallada	
Errores algebraicos y de operatoria		
Relativos al signo menos en potencias de exponente par e impar ($Ejemplo: -(-x)^4 = x^4$)		
Despistes (al sustituir, etc)		
Cambio de signo de una expresión		
Identidades notables ($Ejemplo$: $(x+2)^2 = x^2 + 4$)		
Identidades notables ($Ejemplo$: $(x-2)(x+2) = x^2 + 4$)		
Al introducir o extraer un término de una raíz		
Simplificar términos que están sumando en $Ejemplo$: $\left(\frac{x^2 - \cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}\right)$		
Dividir todos los factores en un producto $\left(Ejemplo: \frac{x^2(x+3)}{x+1} = \frac{\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}\right)$		
$\frac{x^7}{x^7} = 0$		
No calcula correctamente el mínimo común múltiplo		
Opera mal con el mínimo común múltiplo. Ejemplo: $\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x+3} = \frac{6(x+3)-1(x-3)}{x^2-9}$		
Signo menos multiplicando a un paréntesis con dos términos, se olvidan de multiplicar el segundo término		
A la hora de factorizar, no cambian el signo a la raíz $Ejemplo$: $x = 3 \Rightarrow (x+3)$		
Error de cálculo básico (*Ejemplo: 2+4=5,* $\sqrt{9} = 6$*)*		
Error al simplificar $\frac{x^3}{x^3} = x$		
No realiza la distributiva (se olvida del segundo sumando)		
A la hora de factorizar, si la raíz es doble, se olvida de contarla dos veces		
Extraer de una raíz un término que está sumando al resto		
Al dividir una suma, no divide todos los sumandos		
No utiliza paréntesis o se olvida en pasos intermedios		
Saca factor común cuando no es posible		
Saca un número como factor común en una ecuación y una vez factorizada,se olvida de ponerlo		
Errores de notación		
Utilización de otros símbolos para representar $\nexists$		
En la resolución, no pone nunca " $\lim\limits_{x \to x_0}$ "		
Se olvida en algún paso intermedio de poner " $\lim\limits_{x \to x_0}$ "		
No pone que la expresión obtenida es una indeterminación		
Pone que la expresión obtenida es una indeterminación, pero no especifica el tipo		
Pone " $\lim\limits_{x \to x_0}$ " cuando ya no hay que ponerlo porque ya se ha sustituido en la función		